

Propuesta metodológica del modelamiento y solución de un sistema de ecuaciones en diferencia lineales de primer orden de la Teoría del Duopolio de Cournot

Fredy Ricardo Medina Cuzpoca¹, Edgar Antonio Pinto Cruz², Carlos Julio Ramos Ramos³, Edwin Fernando González Martínez⁴, y Julián Andrés Salamanca Bernal⁵

¹Fundación Universitaria Los Libertadores - Estudiante Especialización

²Fundación Universitaria Los Libertadores - Estudiante Especialización

³Fundación Universitaria Los Libertadores - Estudiante Especialización

⁴Fundación Universitaria Los Libertadores - Director de Proyecto Aplicado

⁵Fundación Universitaria Los Libertadores - Asesor de Proyecto Aplicado

Resumen

Es muy importante el estudio de los sistemas invariantes en el tiempo (LTI) y como ejemplo de aplicación, la Teoría de Cournot del Duopolio, pues estos sistemas LTI facilitan la comprensión y el análisis de sistemas muy complejos. Al respecto Blanco (2017), en su artículo "El método científico en la teoría económica de A. A. Cournot" analiza la repercusión de esta teoría a la economía y describe aportes metodológicos de Cournot, encontrando que la matemática está en la base teórica de otros saberes. En el ámbito de las ecuaciones en diferencia aplicadas a modelos económicos Romero (2012), en su trabajo "Las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones en diferencia orientadas al modelamiento económico", describe la obtención de modelos económicos a través de ecuaciones diferenciales (análisis continuo) y ecuaciones en diferencia (análisis discreto). En este artículo se hace una propuesta metodológica de solución de un sistema de ecuaciones en diferencia, propios de un modelo de Duopolio de la teoría de Cournot en tiempo discreto que puede optimizar las curvas de aprendizaje de los estudiantes en los dominios mencionados previamente. Se parte de un ejercicio hipotético para realizar un modelo de juguete que permite plantear una propuesta metodológica general de solución de modelos económicos de Duopolio de Cournot con condiciones iniciales de demanda y de precios por unidad de producción, además se realiza una implementación en el lenguaje de programación Phyton.

Palabras clave— Cournot, duopolio, mercado, producción, demanda, competencia, optimización, competidor, metodología, invarianza, programación, Phyton.

Abstract

The study of time invariant systems (LTI) is very important and as an example of its application, Cournot's Duopoly Theory, since these LTI systems facilitate the understanding and analysis of very complex systems. In this regard Blanco (2017), in his article "The scientific method in the economic theory of A. A. Cournot" analyzes the impact of this theory to economics and describes Cournot's methodological contributions, finding that mathematics is in the theoretical basis of other knowledge. In the field of difference equations applied to economic models, Romero (2012), in his work "Ordinary differential equations and difference equations oriented to economic modeling", describes the obtaining of economic models through differential equations (continuous analysis) and difference equations (discrete analysis). In this article a methodological proposal is made for the solution of a system of equations in difference, proper of a Duopoly model of the Cournot theory in discrete time that can optimize the learning curves of the students in the previously mentioned domains. We start from a hypothetical exercise to make a toy model that allows us to propose a general methodological proposal for the solution of economic models of Cournot Duopoly with initial conditions of demand and prices per unit of production. In addition, an implementation in the programming language Phyton is made.

Keywords— Cournot, duopoly, market, output, demand, competition, optimization, competitor, methodology, invariance, programming, Phyton.

1. Introducción

Los sistemas lineales con coeficientes constantes invariantes en el tiempo hacen parte de los Sistemas Invariantes en el Tiempo conocidos como LTI (Linear and Time-Invariant). El estudio de estos sistemas es muy importante, ya que facilita en gran medida el

análisis de sistemas muy complejos que pueden tratarse de manera más sencilla mediante modelos matemáticos que cumplan con las condiciones de linealidad y de invarianza en el tiempo. Incluso cuando se cuenta con poca información sobre algún sistema, un modelo de estas características permite predecir rápidamente el comportamiento de las salidas, teniendo en cuenta las

entradas (Dademuchconnection, 2017).

Algunos ejemplos de aplicación son los impulsos de señales, los modelos de cambio de población con inmigración, estructuras de jerarquías y el modelo de la Teoría de Cournot del Duopolio en el que se centra este estudio y que puede modelar una amplia variedad de situaciones de competencia económica por parte de dos empresas de distintos sectores económicos como petroleras, farmacéuticas, tecnológicas, semiconductores, productos básicos y educación.

Modelar un sistema de ecuaciones en diferencia invariante en el tiempo y solucionarlo, en este caso utilizando herramientas accesibles en internet como el acceso a **Google Colab** (que usa el lenguaje de programación Phyton), desarrolla diferentes habilidades en los estudiantes y puede disminuir los tiempos en los aprendizajes.

En este estudio se entiende que; 1) Aprender es una capacidad de construir soluciones para resolver los problemas de la vida, ser feliz y poder realizarse como ser humano. 2) Estas capacidades integran conocimientos, emociones, habilidades y destrezas. 3) Las soluciones representan la posibilidad de la creatividad humana para utilizar aspectos teóricos y prácticos, lo que implica conocer, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear (Picardo y Ábrego, 2019).

Para la realización de este estudio se recurre a la solución de un ejercicio particular como Toy Model o **Modelo de Juguete** (Reutlinger, Hangleiter, y Hartmann, 2018) y se hace una generalización en la metodología de solución para este tipo de competencia económica entre dos empresas. Se pretende mejorar la curva de aprendizaje respecto a la Teoría de Cournot del Duopolio, de la cual se encuentra gran cantidad de estudios, por ejemplo (Blanco, 2017), (Roldán, 2017), (Streb, 2015) y (Antía, 1986); sin embargo, en el tema específico de modelar ecuaciones en diferencia se encuentran en menor cantidad, se menciona a Romero (2012) y a Luenberger (1979). En la búsqueda que hicieron los autores de este artículo no se encontraron estudios referentes a la solución de las ecuaciones en diferencia de un modelo de Duopolio de la Teoría de Cournot utilizando el lenguaje de programación Phyton.

2. Marco Teórico

Se utilizan las siguientes consideraciones acerca de los Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI) y la Teoría del Duopolio de Cournot en este estudio.

2.1. Sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI).

La linealidad y la invarianza temporal son dos propiedades de un sistema que simplifican enormemente el estudio de los sistemas que las exhiben, en el caso que se presenta en este estudio se cumplen las dos propiedades.

2.1.1. Sistemas Lineales (L).

De acuerdo con Luenberger (1979), los sistemas lineales cumplen con las propiedades de escalado lineal y principio de superposición.

Cuando una entrada a un sistema cualquiera se escala, la salida del sistema se escala en la misma cantidad.

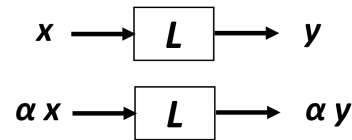


Figura 1: Escalado lineal.

Una entrada x al sistema lineal L da una salida y . Si se escala la entrada x por α y se pasa por el mismo sistema, la salida será αy como en la Figura 1.

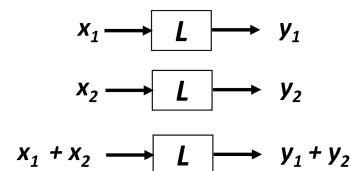


Figura 2: Principio de superposición.

Si se suman las entradas x_1 con x_2 y se pasan por un sistema lineal L , la salida será la suma de las salidas y_1 con y_2 como en la Figura 2.

2.1.2. Sistemas Invariantes en el tiempo (TI).

De acuerdo con Libretexts (2019) un sistema invariante en el tiempo tiene la propiedad de que una determinada entrada siempre dará la misma salida, sin tener en cuenta el momento en que se aplicó la entrada al sistema.

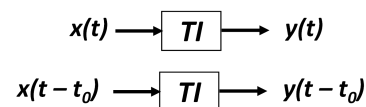


Figura 3: Sistemas invariantes en el tiempo.

En la Figura 3 se esquematizan dos entradas (izquierda de TI) y dos salidas (derecha de TI) en tiempos diferentes t y $(t - t_0)$. Al pasar ambas entradas por el mismo sistema TI, la salida es idéntica con la diferencia que $y(t - t_0)$ está desplazada en un tiempo t_0 .

Los sistemas invariantes en el tiempo se modelan con ecuaciones de coeficiente constantes, esto quiere decir que los parámetros del sistema no cambian con el tiempo y una entrada en un periodo actual dará el mismo resultado (salida) que la misma entrada en un periodo posterior.

2.1.3. Sistemas Invariantes en el tiempo (LTI).

Siguiendo a Libretexts (2019) los sistemas LTI son un subconjunto de los sistemas lineales, por lo tanto, cumplen con los principios de linealidad, además de no cambiar en el tiempo.

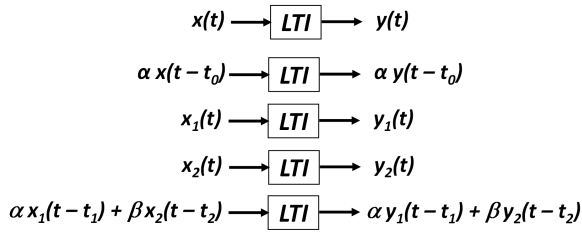


Figura 4: Sistemas lineales invariantes en el tiempo.

En la Figura 4 se esquematizan los sistemas invariantes en el tiempo con las propiedades de linealidad y de invarianza en el tiempo descritas anteriormente.

Las entradas al sistema LTI en el modelo de juguete propuesto son las cantidades de las empresas q_1 y q_2 , mientras que las salidas al sistema son los beneficios de las empresas B_1 y B_2 .

2.2. Teoría del Duopolio de Cournot.

Duopolio se refiere a una estructura de mercado en la que dos empresas compiten para atender la demanda de la industria. Dado que el precio varía con la producción total, está claro que cada empresa debe tener en cuenta las acciones de la otra al determinar su mejor nivel de producción. Resultan varios procesos dinámicos, dependiendo de las estrategias particulares empleadas por las dos empresas (Luenberger, 1979).

De acuerdo con Policonomics (2022), el modelo de competencia de Cournot, se considera como “un modelo de competencia imperfecta en el que dos empresas con funciones de costes idénticas compiten con bienes homogéneos en un entorno estático”.

En el duopolio de Cournot ambas empresas luchan por obtener los beneficios máximos. Estos proceden del máximo volumen de ventas (algo mayor de la cuota de mercado) y precios más altos (beneficios mayores). Aquí sucede que el aumento de los beneficios mediante precios más altos puede perjudicar a los ingresos debido a la pérdida de cuota de mercado. Cournot soluciona esta situación maximizando los ingresos y la cuota de mercado, optimizando el precio. Este precio óptimo será el mismo para ambas empresas, ya que de otra manera la empresa con el precio más bajo se hará con todo el mercado (Policonomics, 2022).

Según Policonomics (2022) en el Duopolio de Cournot existen dos empresas operando en un mercado limitado. La producción del mercado es igual a $P(Q) = a - bQ$, y donde $Q = q_1 + q_2$ para las dos empresas. Ambas empresas recibirán unos beneficios derivados de una toma de decisión simultánea hecha por ambas sobre cuánto producir, y también basada en su función de costes: $CT_i = C - q_i$.

Algebraicamente quedaría:

$$MaxP_i(Q) = [a - b(q_i + q_j) - c]q_i \quad (1)$$

Con el fin de maximizar, la condición de primer orden será:

$$q_i = \frac{a - bq_j - c}{2b} \quad (2)$$

Y si, $q_i = q_j$, entonces ambas son iguales a $\frac{a-c}{3b}$.

De esta manera, las funciones de reacción (líneas azules de la Figura 5), donde la variable clave es el precio fijado por la otra empresa, tomarán la siguiente forma:

$$FR_i(q_j) = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_j \quad (3)$$

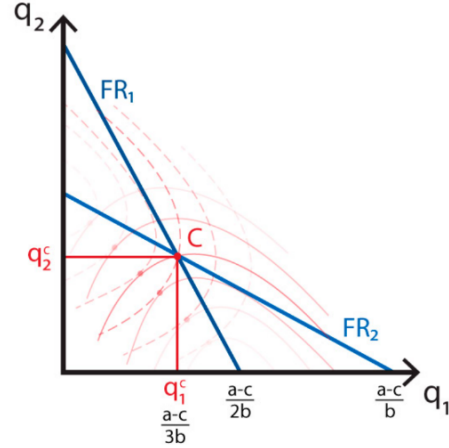


Figura 5: Funciones de reacción de las empresas.

3. Resultados

Los resultados obtenidos de este estudio se pueden resumir en dos etapas que se describen a continuación.

3.1. Modelo de Juguete

A continuación se presenta una situación hipotética entre dos empresas que permite dar luces sobre el desarrollo metodológico que se propondrá para el aprendizaje de la teoría de Cournot del duopolio. Se propone la identificación y planteamiento del modelo matemático que representa el Duopolio de Cournot, obtención de las funciones de reacción para cada empresa y la producción de equilibrio para las dos empresas, planteamiento y solución de las matrices de estado, y por último se lleva a cabo una implementación de la solución del problema en lenguaje de programación Phyton.

Acudiendo a Luenberger (1979) suponga que la demanda total de dos industrias $d(k)$ en cualquier período es

$$d(k) = 200 - 2p(k) \quad (4)$$

Donde $p(k)$ es el precio actual por unidad producida (en dolares). Sean $q_1(k)$, $q_2(k)$ los niveles de producción de las dos empresas (en unidades producidas). Suponiendo que el precio se ajusta para vender toda la producción actual, se sigue que

$$p(k) = 100 - \frac{1}{2}[q_1 + q_2(k)] \quad (5)$$

Suponga además que el costo total de producción de las dos empresas es:

$$C_1(k) = 5q_1(k) \quad (6)$$

$$C_2(k) = \frac{1}{2}q_2(k)^2 \quad (7)$$

Ambas firmas conocen la curva de demanda, pero cada una conoce solo su propia curva de costos. Los beneficios actuales de las dos empresas son los ingresos menos los costos; eso es, $p(k)q_1k - C_1(k)$ y $p(k)q_2(k) - C_2(k)$, respectivamente.

La teoría de Cournot se basa en el supuesto de que cada empresa selecciona su nivel de producción para maximizar su propio beneficio, utilizando alguna estimación de la producción de su competidor. La función correspondiente, para cada empresa, que expresa el mejor nivel de producción en función de la estimación de la producción del competidor, se denomina **función de reacción**.

- (a) Suponiendo que cada empresa estima la producción de su competidor utilizando la producción real de su competidor del período anterior, **obtenga dos funciones de reacción** en forma de dos ecuaciones en diferencia lineales de primer orden.
- (b) Encuentre la producción de equilibrio de cada empresa.
- (c) Deduzca una solución general para períodos pares y verifique su respuesta a la parte (b).
- (d) Suponga que ambas empresas estiman la producción de la otra como un promedio simple de los dos períodos anteriores en un esfuerzo por suavizar la respuesta oscilatoria. Demuestre que para condiciones iniciales arbitrarias, la convergencia al equilibrio no necesita ser más rápida. (Sugerencia: no necesita factorizar, pero debe analizar, el nuevo polinomio característico).

Para dar solución a los literales a, b, c y d, se identifica la función de demanda total y se despeja el precio actual por unidad para encontrar las funciones de reacción de las dos empresas en forma de dos ecuaciones en diferencia lineales de primer orden. Posteriormente se halla el punto de equilibrio, el precio, la demanda y el beneficio en el periodo k para cada una de las empresas.

Luego se plantean las ecuaciones de estado dinámico en forma matricial para encontrar los eigenvalores de la matriz de estado. Posteriormente, se halla la matriz de transición con el fin de dar solución al sistema en periodos de uno en uno y para periodos pares, finalmente se analiza la convergencia al equilibrio con un promedio simple de los dos periodos anteriores. Se utiliza el lenguaje de programación Python como herramienta para la solución de esta situación hipotética entre las dos empresas. Estos procedimientos se detallan en seguida.

3.1.1. Funciones de reacción

Para la solución del literal (a) se realiza el siguiente procedimiento utilizando los datos del ejercicio del Duopolio hipotético propuesto.

Se toma la demanda total (ecuación 4)

$$d(k) = 200 - 2p(k)$$

Se encuentra

$$p(k) = \frac{200 - d(k)}{2} = 100 - \frac{d(k)}{2} \quad (8)$$

Se halla el precio actual por unidad (ecuación 5)

$$p(k) = 100 - \frac{1}{2}[q_1(k) + q_2(k)]$$

En la Tabla 1 se observan los cálculos utilizados para hallar las funciones de reacción de las dos empresas.

Las funciones de reacción son:

$$B_1(k + 1) = -q_1(k) - \frac{1}{2}q_2(k - 1) + 95 \quad (9)$$

$$B_2(k + 1) = -\frac{1}{2}q_1(k - 1) - 2q_2(k) + 100$$

3.1.2. Producción de equilibrio

Para hallar la producción de equilibrio (solución del literal b) se resuelve el sistema de las funciones de reacción igualándolas a cero (0), esto es $B_1(k + 1) = B_2(k + 1) = 0$.

$$-q_1(k) - \frac{1}{2}q_2(k - 1) + 95 = 0 \quad (10)$$

$$-\frac{1}{2}q_1(k - 1) - 2q_2(k) + 100 = 0$$

La producción de equilibrio para las empresas se muestra la Figura 6.

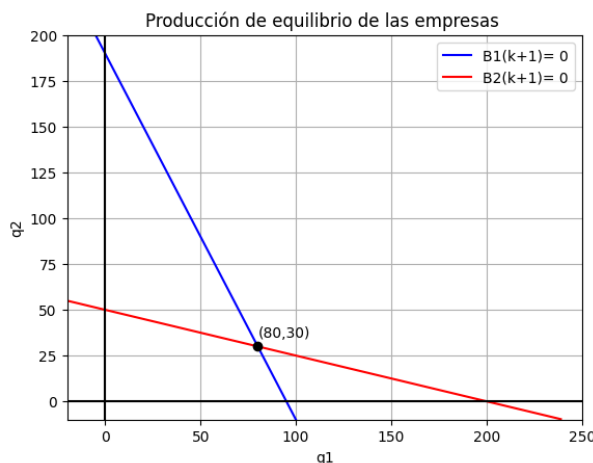


Figura 6: Producción de equilibrio de las empresas.

En la Figura 6 se puede observar que las cantidades que cada empresa debe producir en el punto de equilibrio, $q_1 = 80$ y $q_2 = 30$.

3.1.3. Solución general para periodos pares y verificación del literal b.

La información que hasta este momento se tiene ayuda a encontrar otros datos interesantes como los que se mencionan a continuación. La solución general de las ecuaciones en diferencia se desarrolla en el numeral 3.1.3.5.

Empresa 1 (E_1)	Empresa 2 (E_2)
$q_1(k)$ = Cantidad producida por la E_1	$q_2(k)$ = Cantidad producida por la E_2
$C_1(k) = 5q_1(k)$ = Costo de la E_1	$C_2(k) = \frac{1}{2}[q_2(k)]^2$ = Costos de la E_2
<p>Beneficio de la $E_1 = B_1(k) = \text{Ingresos } E_1 - \text{Costos } E_1$</p> $B_1(k) = p(k)q_1(k) - C_1(k)$ <p>Reemplazando se tiene</p> $B_1(k) = (100 - \frac{1}{2}[q_1(k) + q_2(k-1)])q_1(k) - 5q_1(k)$ <p>por último</p> $B_1(k) = -\frac{1}{2}[q_1(k)]^2 - \frac{1}{2}q_1(k)q_2(k-1) + 95q_1(k)$	<p>Beneficio de la $E_2 = B_2(k) = \text{Ingresos } E_2 - \text{Costos } E_2$</p> $B_2(k) = p(k)q_2(k) - C_2(k)$ <p>Reemplazando se tiene</p> $B_2 = (100 - \frac{1}{2}[q_1(k-1) + q_2(k)])q_2(k) - \frac{1}{2}(q_2(k))^2$ <p>por último</p> $B_2 = -\frac{1}{2}q_1(k-1)q_2(k) - [q_2(k)]^2 + 100q_2(k)$
<p>Para el periodo siguiente se optimiza el beneficio de E_1 derivando parcialmente $B_1(k)$ con respecto a $q_1(k)$</p> $B_1(k+1) = -q_1(k) - \frac{1}{2}q_2(k-1) + 95 = 0$ <p>Y esta es la Funcion de Reacción de la Empresa 1</p> $q_1(k)^* = -\frac{1}{2}q_2(k-1) + 95$	<p>Para el periodo siguiente se optimiza el beneficio de E_2 derivando parcialmente $B_2(k)$ con respecto a $q_2(k)$</p> $B_2(k+1) = -\frac{1}{2}q_1(k-1) - 2q_2(k) + 100 = 0$ <p>Y esta es la Funcion de Reacción de la Empresa 2</p> $q_2(k)^* = -\frac{1}{4}q_1(k-1) + 50$

Tabla 1: Ecuaciones generadoras de las funciones de reacción con condiciones del literal (a).

3.1.3.1. Precio en el punto de equilibrio en el periodo k.

Se reemplazan los valores de las cantidades de producción del punto de equilibrio en la ecuación 5.

$$p(k) = 100 - \frac{1}{2}[q_1(k) + q_2(k)] = 45 \text{ dólares}$$

3.1.3.2. Demanda total en el punto de equilibrio en el periodo k.

Se reemplazan los valores del punto de equilibrio en la ecuación 4.

$$d(k) = 200 - 2p(k) = 200 - 2(45) = 110 \text{ dólares}$$

3.1.3.3. Beneficio de cada empresa en el periodo k.

Se reemplazan los valores del punto de equilibrio en las ecuaciones 9.

$$B_1(k) = -\frac{1}{2}[q_1(k)]^2 - \frac{1}{2}q_1(k)q_2(k-1) + 95q_1(k)$$

$$B_1(k) = -\frac{1}{2}[80]^2 - \frac{1}{2}(80)(30) + 95(80) = 3200 \text{ dólares}$$

$$B_2(k) = -\frac{1}{2}q_1(k-1)q_2(k) - [q_2(k)]^2 + 100q_2(k)$$

$$B_2(k) = -\frac{1}{2}(80)(30) - [30]^2 + 100(30) = 900 \text{ dólares}$$

3.1.3.4. Beneficio de cada empresa en el punto de equilibrio en el periodo k en función de la producción de su competencia.

Se reemplaza $q_1(k)^* = -\frac{1}{2}q_2 + 95$ en la función de beneficio de la empresa 1 (ecuación 9).

$$B_1(k) = -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}q_2(k) + 95\right]^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}q_2(k) + 95\right)q_2(k) + 95\left(-\frac{1}{2}q_2(k) + 95\right)$$

$$B_1(k) = -\frac{1}{8}[q_2(k)]^2 - \frac{189}{4}q_2(k) + \frac{9025}{2}$$

Se reemplaza $q_2(k)^* = -\frac{1}{4}q_1(k) + 50$ en la función de beneficio de la Empresa 2 (ecuación 9).

$$B_2(k) = -\frac{1}{2}q_1(k)\left(-\frac{1}{4}q_1(k) + 50\right) - \frac{1}{4}q_1(k) + 50 + 100\left(-\frac{1}{4}q_1(k) + 50\right)$$

$$B_2(k) = -\frac{1}{16}[q_1(k)]^2 - \frac{199}{8}q_1(k) + 2500 \quad (11)$$

3.1.3.5. Ecuaciones de estado dinámico en forma matricial.

Para encontrar la solución general (literal c) se necesita realizar los siguientes cálculos hasta hallar las funciones de beneficio que permitirán encontrar la matriz de estado que se lleva a su estado estacionario.

De las funciones de reacción (ecuaciones 9)

$$B_1(k+1) = -q_1(k) - \frac{1}{2}q_2(k+1) + 95$$

$$B_2(k+1) = -\frac{1}{2}q_1(k-1) - 2q_2 + 100$$

Se tiene en forma matricial

$$\begin{bmatrix} B_1(k+1) \\ B_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 95 \\ 100 \end{bmatrix} \quad (12)$$

y de manera general

$$B(k+1) = A \cdot x(k) + b$$

3.1.3.6. Matriz de estado.

A partir de la forma matricial de las ecuaciones de estado dinámico (ecuaciones 12) se obtiene la matriz de estado A.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 \\ -0,5 & -2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

3.1.3.7. Valores propios o eigenvalores de la matriz A.

Los valores propios (λ) de A (ecuación 13) se obtienen igualando a cero (0) el polinomio característico de la matriz A $P_A(\lambda) = 0$ y obteniendo sus raíces. Para encontrar este polinomio se halla el determinante de $A - \lambda I$, con I como la matriz identidad de A.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)(-2 - \lambda) - \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 1,75 = 0 \quad (14)$$

El polinomio característico de la matriz A (ecuación 14) se iguala a cero.

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 1,75 = 0 \quad (15)$$

Al resolver la ecuación 15 para λ se encuentran los valores propios de A.

$$\lambda_1 = \frac{-3 + \sqrt{2}}{2} = -0,79289$$

$$\lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{2}}{2} = -2,20710$$

3.1.3.8. Matriz de transición.

La matriz de transición en un sistema lineal con coeficientes constantes invariantes en el tiempo se define de la siguiente manera:

$$A^k = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^k & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k \end{bmatrix} \quad (16)$$

Se reemplaza en la matriz de transición λ_1 y λ_2 para encontrar la matriz de transición del duopolio.

$$A^k = \begin{bmatrix} (-0,79)^k & 0 \\ 0 & (-2,20)^k \end{bmatrix} \quad (17)$$

3.1.3.9. Solución al sistema.

La solución al sistema para periodos sucesivos es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} B_1(k) \\ B_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-0,79)^k & 0 \\ 0 & (-2,20)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \end{bmatrix} \quad (18)$$

y las ecuaciones de beneficio son

$$B_1(k) = (-0,79)^k q_1(k) \quad (19)$$

$$B_2(k) = (-2,20)^k q_2(k) \quad (20)$$

3.1.3.10. Oscilaciones de las ecuaciones de beneficio para periodos sucesivos en el tiempo.

El comportamiento de las ecuaciones 19 y 20 (de beneficio) se describe en las Figuras 7 y 8.

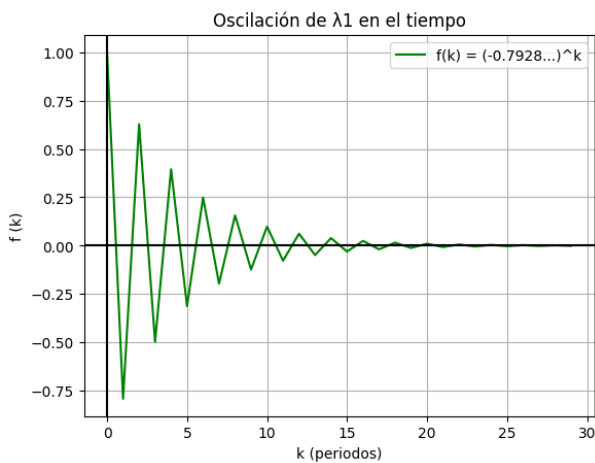


Figura 7: Oscilación de la ecuación de beneficio de la empresa 1.

En la Figura 7 se ve que la oscilación de la ecuación de beneficio de la empresa 1 se amortigua a medida que aumentan los periodos (después de $k = 20$).

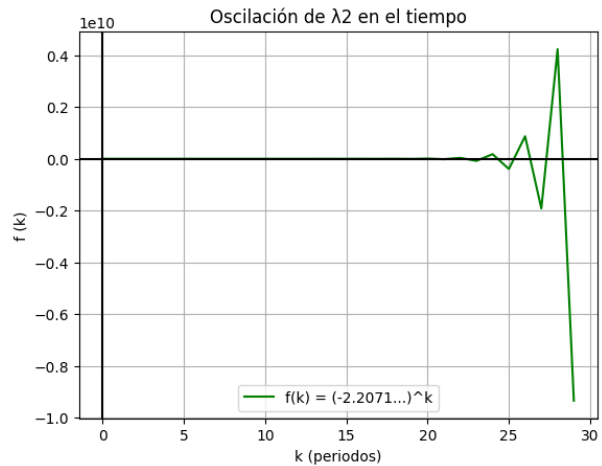


Figura 8: Oscilación de la ecuación de beneficio de la empresa 2.

Como se identifica en la Figura 8, la oscilación de la ecuación de beneficio de la empresa 2 se da después del periodo $k = 20$, observándose el antagonismo con la ecuación de beneficio de la empresa 1.

3.1.3.11. Solución al sistema para periodos pares en el tiempo

Se reemplaza k en la ecuación 18 por $2k$

$$\begin{bmatrix} B_1(2k) \\ B_2(2k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-0,79)^{2k} & 0 \\ 0 & (-2,20)^{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(2k) \\ q_2(2k) \end{bmatrix}$$

para obtener

$$\begin{bmatrix} B_1(2k) \\ B_2(2k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,62)^k & 0 \\ 0 & (4,87)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(2k) \\ q_2(2k) \end{bmatrix} \quad (21)$$

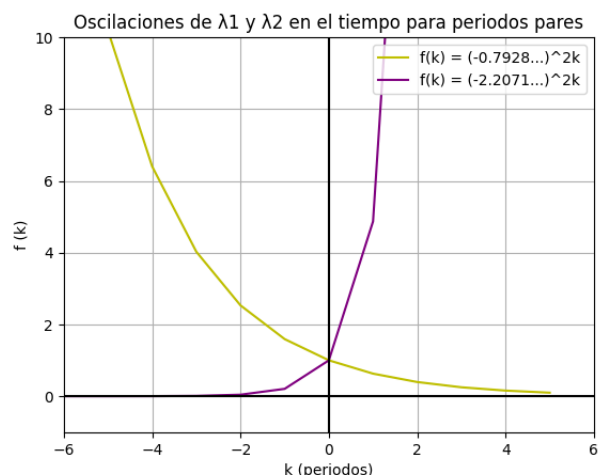
y las ecuaciones de beneficio serían

$$B_1(2k) = (0,62)^k q_1(2k) \quad (22)$$

$$B_2(2k) = (4,87)^k q_2(2k) \quad (23)$$

3.1.3.12. Comportamiento de las ecuaciones de beneficio para periodos pares en el tiempo.

El comportamiento de las ecuaciones 22 y 23 (de beneficio) para periodos pares se muestra en la Figura 9.



Empresa 1 (E_1)	Empresa 2 (E_2)
$q_1(k+2) =$ Cantidad producida por la E_1	$q_2(k+2) =$ Cantidad producida por la E_2
$q_1(k+2) = \frac{q_2(k+1)+q_2(k)}{2}$ <p>Sabiendo que</p> $q_1(k)^* = q_1(k+1) = -\frac{1}{2}q_2(k) + 95$ <p>reemplazando</p> $q_1(k+2) = \frac{-\frac{1}{2}q_2(k)+95+q_1(k)}{2}$ <p>finalmente</p> $q_1(k+2) = \frac{1}{2}q_1(k) - \frac{1}{4}q_2(k) + \frac{95}{2}$	$q_2(k+2) = \frac{q_1(k+1)+q_1(k)}{2}$ <p>Sabiendo que</p> $q_2(k)^* = q_2(k+1) = -\frac{1}{4}q_1(k) + 50$ <p>reemplazando</p> $q_2(k+2) = \frac{-\frac{1}{4}q_1(k)+50+q_2(k)}{2}$ <p>finalmente</p> $q_2(k+2) = -\frac{1}{8}q_1(k) + \frac{1}{2}q_2(k) + 25$
$C_1(k) = 5q_1(k) =$ Costo de la E_1	$C_2(k) = \frac{1}{2}[q_2(k)]^2 =$ Costo de la E_2
<p>Beneficio de la $E_1 = B_1(k) =$ Ingresos $E_1 -$ costos E_1</p> $B_1(k+2) = p(k)q_1(k+2) - C_1(k)$ <p>Reemplazando tenemos</p> $B_1(k+2) = (100 - \frac{1}{2}[q_1(k) + q_2(k)])q_1(k+2) - 5q_1(k)$ <p>luego</p> $B_1(k+2) = (100 - \frac{1}{2}[q_1(k) + q_2(k)])$ $(\frac{1}{2}q_1(k) - \frac{1}{4}q_2(k) + \frac{95}{2}) - 5q_1(k)$ <p>por último</p> $B_1(k+2) = -\frac{1}{4}[q_1(k)]^2 - \frac{1}{8}q_1(k)q_2(k)$ $+ \frac{85}{4}q_1(k) + \frac{1}{8}[q_2(k)]^2$ $- \frac{195}{4}q_2(k) + 4750$	<p>Beneficio de la $E_2 = B_2(k) =$ Ingresos $E_2 -$ costos E_2</p> $B_2(k+2) = p(k)q_2(k+2) - C_2(k)$ <p>Reemplazando tenemos</p> $B_2(k+2) = (100 - \frac{1}{2}[q_1(k) + q_2(k)])q_2(k+2) - \frac{1}{2}(q_2(k))^2$ <p>luego</p> $B_2(k+2) = (100 - \frac{1}{2}[q_1(k) + q_2(k)])$ $(-\frac{1}{8}q_1(k) + \frac{1}{2}q_2(k) + 25) - \frac{1}{2}(q_2(k))^2$ <p>por último</p> $B_2(k+2) = \frac{1}{16}[q_1(k)]^2 - \frac{3}{16}q_1(k)q_2(k)$ $- 25q_1(k) - \frac{3}{4}[q_2(k)]^2$ $+ \frac{75}{2}q_2(k) + 2500$
<p>Para el periodo siguiente se optimiza el beneficio de E_1 derivando parcialmente $B_1(k)$ con respecto a $q_1(k)$</p> $B_1(k+1) = -\frac{1}{2}q_1(k) - \frac{1}{8}q_2(k-1) + \frac{85}{4} = 0$ <p>Y esta es la Funcion de reacción de la Empresa 1</p> $q_1(k)^* = -\frac{1}{4}q_2(k-1) + \frac{85}{2}$	<p>Para el periodo siguiente se optimiza el beneficio de E_2 derivando parcialmente $B_2(k)$ con respecto a $q_2(k)$</p> $B_2(k+1) = -\frac{3}{16}q_1(k-1) - \frac{3}{2}q_2(k) + \frac{75}{2} = 0$ <p>Y esta es la Funcion de Reacción de la Empresa 2</p> $q_2(k)^* = -\frac{2}{16}q_1(k-1) + 25$

Tabla 2: Ecuaciones generadoras de las funciones de reacción con condiciones del literal (d).

Figura 9: Comportamiento de las ecuaciones de beneficio de las empresas 1 y 2.

En la Figura 9 se evidencia que el comportamiento oscilatorio se suaviza al trabajar con periodos pares.

3.1.4. Demostración de la convergencia al equilibrio

Para dar solución al literal **d** se realizan las operaciones descritas en la Tabla 2.

Se utilizan las ecuaciones 4, 5, 6 y 7 para replantear las nuevas condiciones del Duopolio, estos cálculos se pueden ver en la Tabla 2.

3.1.4.1. Producción de equilibrio.

Para hallar la producción de equilibrio se resuelve el sistema igualando $B_1(k + 1) = B_2(k + 1) = 0$.

$$\begin{aligned} B_1(k + 1) &= -\frac{1}{2}q_1(k) - \frac{1}{8}q_2(k - 1) + \frac{85}{4} = 0 \\ B_2(k + 1) &= -\frac{3}{16}q_1(k - 1) - \frac{3}{2}q_2(k) + \frac{75}{2} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (ecuaciones 24) de beneficio se obtienen las cantidades $q_1 = 37,419$ y $q_2 = 20,322$.

3.1.4.2. Ecuaciones de estado dinámico en forma matricial.

A partir de las funciones de reacción (ecuaciones 24) se obtienen las ecuaciones de estado dinámico en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} B_1(k + 1) \\ B_2(k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{85}{4} \\ \frac{75}{2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

y de manera general

$$B(k + 1) = A \cdot x(k) + b$$

3.1.4.3. Matriz de estado.

A partir de las ecuaciones de estado dinámico en forma matricial se encuentra la matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,125 \\ -0,1875 & -1,5 \end{bmatrix} \quad (26)$$

3.1.4.4. Valores propios o eigenvalores de la matriz A.

Se procede de manera análoga al numeral 3.1.3.7. para encontrar los nuevos eigenvalores de A .

El polinomio característico de la matriz A es:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + \frac{93}{128} = 0 \quad (27)$$

Los valores propios de A son:

$$\lambda_3 = -0,477087$$

$$\lambda_4 = -1,52291$$

3.1.4.5. Solución al sistema para periodos pares.

Se reemplaza k en la ecuación 18 por $2k$, junto con los valores encontrados al solucionar la ecuación 27 (λ_3 y λ_4) para hallar la solución al sistema

$$\begin{bmatrix} B_1(2k) \\ B_2(2k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-0,47)^{2k} & 0 \\ 0 & (-1,52)^{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(2k) \\ q_2(2k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_1(2k) \\ B_2(2k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,22761)^k & 0 \\ 0 & (2,31926)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(2k) \\ q_2(2k) \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$B_1(k) = (0,22761)^k q_1(2k) \quad (29)$$

$$B_2(k) = (2,31926)^k q_2(2k) \quad (30)$$

3.1.4.6. Polinomios característicos de los valores propios.

Literales a, b y c (ecuación 14). $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 1,75 = 0$

Literal d (ecuación 27). $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 0,7265625 = 0$

Los polinomios característicos de los valores propios de las ecuaciones 14 y 27 se pueden observar en la figura 10.

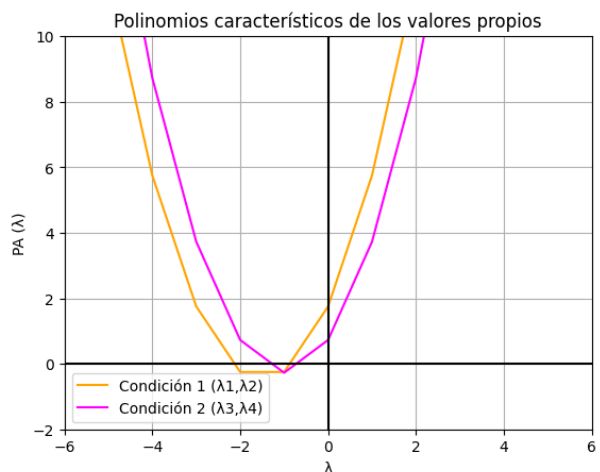


Figura 10: Comportamiento de los polinomios característicos encontrados.

En la Figura 10 se evidencia que los polinomios característicos son muy parecidos. En las condiciones 1 (literales a, b, c) el rango de los valores propios es más pequeño comparado con el de las condiciones 2 (literal d).

3.1.4.7. Convergencia al equilibrio de los valores propios para periodos pares.

El comportamiento de las ecuaciones 22, 23, 29 y 30 (de beneficio) para periodos pares se muestra en la Figura 11.

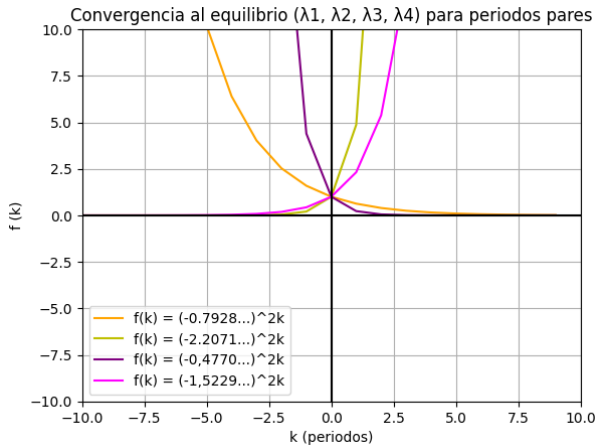


Figura 11: Comportamiento de los valores propios en las condiciones de los literales c y d.

En la Figura 11 se ve que la convergencia al equilibrio en las condiciones 1 (literal c) se da más rápido que en las condiciones 2 (literal d).

3.2. Propuesta metodológica general de solución.

En este artículo se propone una adaptación de la metodología SEMMA, que según Moine, Haedo, y Gordillo (2011) fue creada por el SAS Institute quien la define como “el proceso de selección, exploración y modelado de grandes volúmenes de datos para descubrir patrones de negocio desconocidos”. El nombre de esta terminología es el acrónimo correspondiente a las cinco fases básicas del proceso: Sample (Muestreo), Explore (Exploración), Modify (Modificación), Model (Modelado), Assess (Valoración).

Teniendo en cuenta el desarrollo del ejercicio propuesto en el Modelo de Juguete, junto con la teoría de la metodología SEMMA se plantean 5 fases; estas se muestran en la Figura 12 con el fin de dar solución a problemas de ecuaciones lineales en diferencia de la Teoría del Duopolio de Cournot.

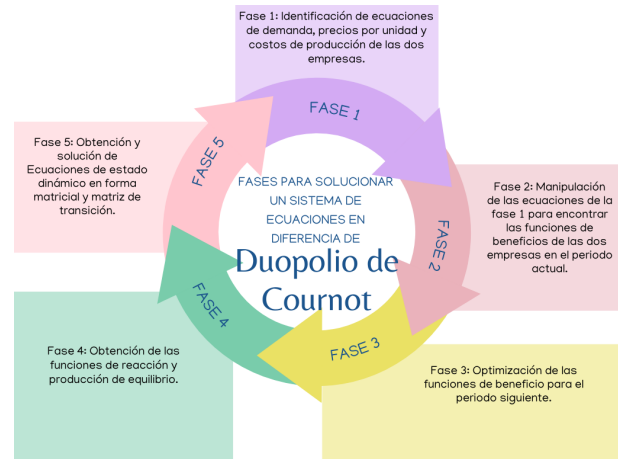


Figura 12: Fases de solución para un sistema LTI de Duopolio de Cournot.

En la **Fase 1** (*Identificación de ecuaciones de demanda, precios por unidad y costos de producción de las dos empresas*) se identifica la ecuación de demanda total en el periodo inicial $d(k)$, además de las ecuaciones de costos de las empresas del duopolio $C_1(k)$ y $C_2(k)$ teniendo en cuenta las cantidades producidas por las dos empresas $q_1(k)$ y $q_2(k)$. Hay que tener en cuenta que las unidades de cantidades y de valores de producción sean consistentes.

En la **Fase 2** (*Manipulación de las ecuaciones de la fase 1 para encontrar las funciones de beneficios de las dos empresas en el periodo actual*) se manipula algebraicamente los datos que se tienen para encontrar una función de precio actual por unidad ($p(k)$) en función de $q_1(k)$ y $q_2(k)$. En seguida se obtienen las ecuaciones de beneficio en el periodo actual de las empresas $B_1(k)$ y $B_2(k)$ en función de las cantidades $q_1(k)$ y $q_2(k)$, realizando la diferencia entre ingresos y costos, recordando que los ingresos serían $p(k) \cdot q_i(k)$.

En la **Fase 3** (*Optimización de las funciones de beneficio para el periodo siguiente*) se derivan parcialmente las funciones de beneficio $B_1(k)$ con respecto a $q_1(k)$ y $B_2(k)$ con respecto a $q_2(k)$ para obtener los beneficios óptimos en el periodo siguiente de las dos empresas $B_1(k+1)$ y $B_2(k+1)$.

En la **Fase 4** (*Obtención de las funciones de reacción y producción de equilibrio*) se obtienen las funciones de reacción $q_1(k)^*$ y $q_2(k)^*$ de las dos empresas igualando a cero las funciones $B_1(k+1)$ y $B_2(k+1)$ y haciendo los despejes correspondientes. La producción de equilibrio se obtiene al solucionar el sistema de ecuaciones de la funciones de reacción.

En la **Fase 5** (*Obtención y solución de ecuaciones de estado dinámico en forma matricial y matriz de transición*) se plantean las ecuaciones de estado dinámico en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} B_1(k+1) \\ B_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

y de manera simplificada

$$B(k+1) = A \cdot x(k) + b \quad (32)$$

para obtener la matriz de estado

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Luego se halla el determinante de la matriz de la diferencia entre A y λI , donde I es la matriz identidad

$$\det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \quad (34)$$

Al solucionar este determinante se encuentra el polinomio característico de A

$$P_A(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \quad (35)$$

con a , b y c constantes.

Este polinomio se iguala a cero (0) y se hallan los valores propios de esta matriz o eigenvalores de A (λ_1 y λ_2).

Finalmente se llega a la matriz de transición

$$A^k = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^k & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k \end{bmatrix} \quad (36)$$

Esta corresponde a la solución de un sistema lineal con coeficientes constantes invariantes en el tiempo.

De esta manera se llega a la solución del sistema expresado en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} B_1(k) \\ B_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_1)^k & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \end{bmatrix} \quad (37)$$

Donde

$$B_1(k) = (\lambda_1)^k q_1(k) \quad (38)$$

$$B_2(k) = (\lambda_2)^k q_2(k) \quad (39)$$

En esta fase también se pueden averiguar datos como la demanda y los precios por unidad actual en el punto de equilibrio del Duopolio, además de poder analizar el comportamiento del polinomio característico de la matriz de estado.

4. Discusión de resultados

El modelo de juguete ha permitido visualizar con detalle la solución de un sistema de ecuaciones en

diferencia lineales, que en este caso modelan la competencia entre dos empresas (Duopolio de Cournot). Esto hace posible una mejor comprensión de los saberes en mención por parte de los estudiantes.

Lo anterior conduce a una propuesta metodológica de 5 fases que buscan optimizar la curva de aprendizaje de los estudiantes en el modelamiento y solución de un sistema de ecuaciones en diferencia lineales de primer orden que se obtienen de un modelo de competencia entre dos empresas como lo propone la Teoría del Duopolio de Cournot.

Esta propuesta queda disponible para ser corroborada con estudiantes de los diferentes espacios académicos de los distintos programas donde se incluya el estudio de los sistemas de ecuaciones invariantes en el tiempo y modelos económicos como los de la teoría de Cournot del Duopolio. En este sentido queda abierta la posibilidad de realizar investigaciones de campo y verificar una mejor comprensión de estos saberes por parte de los estudiantes y si realmente la curva de aprendizaje se optimiza.

5. Conclusiones

Se logra modelar un sistema económico de Cournot mediante ecuaciones en diferencia lineales de primer orden que permite profundizar en el análisis de este tipo de competencias de oferta y demanda entre dos empresas.

En el proceso de modelación se ha podido comprender de una mejor manera las funciones de reacción de una empresa con la proyección de ventas del competidor y cómo se encuentra el equilibrio de producción para maximizar los beneficios de las empresas del Duopolio.

Se presenta una solución a un problema particular de Duopolio de la Teoría de Cournot a través de un modelo de juguete con la ayuda del lenguaje de programación Phyton.

Se crean los códigos para facilitar los cálculos en la solución de un sistema de ecuaciones en diferencia lineales de primer orden de la Teoría del Duopolio de Cournot (Medina, 2023).

La metodología SEMMA ha permitido proporcionar una didáctica con una serie de fases que facilita el proceso de aprendizaje de la Teoría del Duopolio de Cournot, que aunado con la manipulación algebraica utilizando el lenguaje de programación Phyton contribuyen a una mejora en la curva de aprendizaje de los estudiantes.

Referencias

- Antía, J. M. L. (1986). Los orígenes de la economía matemática: Cournot. En *Actas del iii congreso de la sociedad española de historia de las ciencias: San sebastián. 1 al 6 de octubre de 1984* (pp. 51–62).
- Blanco, M. (2017). El método científico en la teoría económica de Cournot. *Libertas: segunda época*, 2(1).
- Dademuchconnection. (2017). *Sistemas lineales e invariantes en el tiempo*. Descargado de <https://dademuch.com/2017/11/13/sistemas-ldcid-modeling-fundamentos/> (Last accessed 08 June 2023)
- Libretexts. (2019). *Sistemas lineales invariantes en el tiempo*. Descargado de [https://espanol.libretexts.org/Ingenieria/Se%C3%B1ales_y_Sistemas_\(Baraniuk_et_al.\)/02%3A_Introducci%C3%B3n_a_los_sistemas/2.02%3A_Sistemas_lineales_invariantes_en_el_tiempo](https://espanol.libretexts.org/Ingenieria/Se%C3%B1ales_y_Sistemas_(Baraniuk_et_al.)/02%3A_Introducci%C3%B3n_a_los_sistemas/2.02%3A_Sistemas_lineales_invariantes_en_el_tiempo) (Last accessed 05 June 2023)
- Luenberger, D. G. (1979). *Introduction to dynamic systems: theory, models, and applications (vol. 1)*. Wiley.

-
- Medina, F. R. (2023). *Código de análisis*. Descargado 2023-06-27, de https://github.com/carlosjulioramos/Duopolio_Cournot.git
- Moine, J. M., Haedo, A. S., y Gordillo, S. E. (2011). Estudio comparativo de metodologías para minería de datos. En *Xiii workshop de investigadores en ciencias de la computación*.
- Picardo, O., y Ábrego, A. M. (2019). *La curva de aprendizaje: Un enfoque neuroevolutivo*. Descargado de <http://ri.ufg.edu.sv/jspui/bitstream/11592/9710/1/Libro%20Curva%20del%20aprendizaje.pdf> (Last accessed 05 June 2023)
- Policonomics. (2022). *Duopolio de cournot*. Descargado de <https://policonomics.com/es/duopolio-cournot/> (Last accessed 05 June 2023)
- Reutlinger, A., Hangleiter, D., y Hartmann, S. (2018). Understanding (with) toy models. *The British Journal for the Philosophy of Science*.
- Roldán, L. (2017). Aplicación teoría cournot–sector real: Sector azucarero.
- Romero, N. P. (2012). Las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones en diferencia orientada al modelamiento económico.
- Streb, J. M. (2015). *Nash, el último fundador de la teoría de juegos, y la evolución del concepto de equilibrio desde cournot* (n.º 572). Serie Documentos de Trabajo.