APLICACIÓN DEL MODELO DE BLACK - SCHOLES A LAS FLUCTUACIONES DE LAS ACCIONES DE ECOPETROL Y PACIFIC RUBIALES DURANTE EL PERIODO JUNIO 2013 A JUNIO 2014

ALVARO JAVIER CANGREJO ESQUIVEL

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA LOS LIBERTADORES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA
BOGOTA D.C.
2015

APLICACIÓN DEL MODELO DE BLACK - SCHOLES A LAS FLUCTUACIONES DE LAS ACCIONES DE ECOPETROL Y PACIFIC RUBIALES DURANTE EL PERIODO JUNIO 2013 A JUNIO 2014

ALVARO JAVIER CANGREJO ESQUIVEL

Trabajo de grado realizado para obtener el título de Especialista en Estadística Aplicada

Asesor
Wilmer Dario Pineda Ríos
Magister en Matemáticas

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA LOS LIBERTADORES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA
BOGOTA D.C.
2015

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogota D.C, 30 de Mayo de 2015

Las directivas de la Fundación Universitaria Los Libertadores, los jurados calificadores y el cuerpo docente no son responsables por los criterios e ideas expuestas en el presente documentos. Estos corresponden únicamente a los autores.

Agradecimientos

Doy gracias a mi familia por su apoyo incondicional en este proceso y a mi director por su buena disposición y el enriquecimiento a mi trabajo.

Índice

Índice de figuras

Índice de cuadros

Glosario

Activo: Cualquier posesión que pueda producir beneficios económicos.

Arbitraje: Es el proceso de comprar un bien en un mercado a un precio bajo y venderlo en otro a un precio más alto, con el fin de beneficiarse con la diferencia de precios.

Derivado financiero: Instrumento financiero cuyo valor depende de otros activos, como por ejemplo una acción, una opción o hasta de otro derivado.

Opción: Instrumento financiero derivado que se establece en un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender bienes o valores (**el activo subyacente**, que pueden ser acciones, bonos, índices bursátiles, etc.) a un precio predeterminado (**strike o precio de ejercicio**), hasta una fecha concreta (vencimiento). Existen dos tipos de opciones: **call** (opción de compra) **y put** (opción de venta).

Opción Americana: Si puede ser ejercida a cualquier tiempo hasta la fecha de expiración.

Opción Europea: Si sólo puede ser ejercida a tiempo T.

Portafolio: Conjunto de activos, que pueden ser acciones, derivados, bonos, etc.

Tasa de interés libre de riesgo: Es aquel interes de una inversión segura y libre de riesgo.

Volatilidad del activo: Desviación estándar de la variación de crecimiento del precio.

Resumen

En este trabajo se analiza el entorno y la dinámica del modelo matemático de Black – Scholes, partiendo esta de una ecuación diferencial estocástica que explica la evolución de los precios de las opciones futuras de un derivado arbitrario. Con estos lineamientos definidos, resolvemos dicha ecuación y mediante un código de programación realizado en el software estadístico R, para establecer el comportamiento generado por las fluctuaciones de los precios de cierre diarios comprendido entre Junio del 2013 y Junio del 2014 tanto a las acciones de Ecopetrol como las de Pacific Rubiales para poder pronosticar el precio de las opciones y determinar cuál de las dos empresas petroleras tienen un menor riesgo al momento de invertir.

Palabras Claves: *Ecuación Diferencial Estocástica, Fluctuación, Derivado, Lema de Ito, Movimiento Browniano, Volatilidad.*

Introducción

En los últimos años, los mercados financieros de capitales y derivados han experimentado un enorme crecimiento tecnológico y científico de tal manera que las industrias han tenido un crecimiento exponencial a nivel mundial. Este periodo de apogeo ha impulsado a las grandes industrias a desarrollar e implementar modelos matemáticos que logren tomar eficazmente la mejor decisión financiera con el propósito de aumentar sus ganancias. Es así que la teoría de valorización de activos comienza con la implementación del modelo de Black – Scholes, el cual pronostica el valor de la opción europea del precio de un derivado a través del tiempo, en el que influye la volatilidad de los precios y la tasa libre de interés. Dicho modelo ha tenido una gran influencia en la manera en que los agentes valúan y cubren opciones financieras además es considerado como punto de referencia para el desarrollo y éxito de la ingeniería financiera [2],[8]. Desde su presentación ha sido estudiada, analizada y contrastada en los mercados reales de opciones y futuros de todo el mundo. De hecho, pocas teorías han sufrido y resistido una revisión empírica tan rigurosa del cual ha salido victoriosa no solo por su flexibilidad y grado de aplicación, sino porque la mayor parte de las ideas de la teoría moderna de valoración ya se encuentran originalmente en ella, de hecho este modelo ha servido de base para numerosas generalizaciones y extensiones por parte de académicos y profesionales de las finanzas [10],[11].

El modelo presenta cierta complejidad en su aplicación por la dificultad de entender su lógica debido a las herramientas matemáticas que utiliza. En este sentido se hace necesario primero aproximarse a ellas desde la Matemática Financiera [1],[6], las Ecuaciones Diferenciales [9],[7] y las Distribuciones de Probabilidad [11] para luego aplicar el modelo a casos particulares; por ejemplo, a las fluctuaciones o movimientos a través del tiempo, ya sea de una forma creciente o decreciente, generada por los precios de cierre de las acciones de Ecopetrol y Pacific Rubiales, empresas petroleras de gran impacto económico para el desarrollo financiero del país y que en la actualidad son cotizantes en la bolsa de valores colombiana [12].

En este trabajo pretendemos analizar las fluctuaciones entre los precios diarios de cierre de las acciones, comprendida entre Junio de 2013 y Junio de 2014, de dos de las empresas petroleras más importante en Colombia y Latinoamérica: Ecopetrol y Pacific Rubiales. Después de dicho análisis, se aplica el modelo de Black – Scholes para determinar las diferencias significativas que existe entre la valorización en las acciones de estas empresas y así tomar la mejor decisión al momento de realizar una inversión. Para ello, en el transcurso del presente trabajo se lleva a cabo las siguientes secciones: en la sección uno se calcula la desviación estándar o volatilidad del cambio en el precio de un activo en uno o múltiples pasos a través del tiempo [4],[5]; en la sección dos se presenta el análisis y la dinámica del modelo Black-Scholes, partiendo de una ecuación estocástica que describe la evolución del precio de un activo a través del tiempo, que posteriormente, será usada para deducir la ecuación de Black - Scholes; en la sección tres se hace el estudio descriptivo de las bases de datos para finalmente, en la sección cuatro, aplicar el modelo de Black - Scholes usando un código de programación desarrollado en el software estadístico R.

1. Volatilidad para el precio de un derivado

En esta sección y en la siguiente, se sigue los desarrollos presentados en [4] y [5].

1.1. Volatilidad cuando el cambio entre dos instantes de tiempo sucesivos es constante

Supongamos que los cambios de precios de un derivado son eventos independientes e idénticamente distribuidos (iid), con función de distribución de probabilidad para una única variable $\Delta x_i \equiv \Delta x$ que describe los cambios en el precio a través de un iterado de tiempo. El valor esperado de una función $f[\Delta x]$ se define como:

$$\overline{f[\Delta x]} \equiv E[f[\Delta x]] = \sum_{\Delta x} f[\Delta x] p[\Delta x] \tag{1}$$

$$\langle f[\Delta x] \rangle \equiv E[f[\Delta x]] = \int_{-\infty}^{\infty} f[\Delta x] p[\Delta x] \mathrm{d}(\Delta x) \tag{2}$$

Si Δx toma valores discretos, la media se puede calcular usando la ecuación (1) con $p[\Delta x]$ una función de distribución de probabilidad discreta; si Δx toma valores continuos, la media se puede calcular usando la ecuación (2) con $p[\Delta x]$ una función de distribución de probabilidad continua.

La elección de $f[\Delta x] = \Delta x$ en las ecuación (1) y (2) se obtienen la media Δx que representa el momento $m = 1$ de $p[\Delta x]$. El m-esimo momento está dada por $\langle (\Delta x - \langle \Delta x \rangle)^m \rangle$. Algunos de estos momentos de orden superior tienen nombres específicos. Por ejemplo, la *asimetría* de $p[\Delta x]$ está dada por $\left\langle \frac{(\Delta x - \langle \Delta x \rangle)^3}{\sigma^3} \right\rangle$ donde σ es la desviación estándar de Δx y la *curtosis* de $p[\Delta x]$ es dada por $k \equiv \left\langle \frac{(\Delta x - \langle \Delta x \rangle)^4}{\sigma^4} \right\rangle$. Dado que la media $\langle \Delta x \rangle$ no necesariamente corresponde a un posible resultado experimental y no explica apropiadamente el comportamiento de las fluctuaciones en Δx. El estadístico apropiado para analizar estas fluctuaciones en finanzas es la varianza que está definida como,

$$\sigma_{\Delta x}^2 \equiv \sigma^2 = \left\langle (\Delta x - \langle \Delta x \rangle)^2 \right\rangle . \tag{3}$$

Si se toma la raíz cuadrada en la ecuación (3) da como resultado la desviación estándar de Δx a través de un solo iterado de tiempo. Esta cantidad es el estadístico más importante en las finanzas y es conocida también como volatilidad, el cual se utiliza en los cálculos de riesgo y valoración de opciones. Tenga en cuenta que el cálculo de la volatilidad sólo implica dos momentos de la función de distribución de probabilidad $p[\Delta x]$ a pesar de que hay un número infinito de tales momentos disponibles. En general, todos estos momentos contendrá información nueva y posiblemente importante en relación de $p[\Delta x]$. A partir de los cambios en el precio del derivado, la función de distribución de probabilidad $p[\Delta x]$ disminuirá monótonamente a cero a medida que $|\Delta x| \longrightarrow \infty$ y por lo tanto $p[\Delta x]$ puede tener *peso* significativo en las colas, generando colas pesadas en la distribución. Sin embargo, no existen leyes universales acerca de la rapidez con que esta función tiende a cero cuando $|\Delta x| \longrightarrow \infty$ en un mercado real. Dado que la información sobre la dinámica del mercado viene dado por $p[\Delta x]$ para todo Δx, podemos estar perdiendo información importante acerca de la probabilidad en los precios de un derivado si no tenemos en cuenta para este peso extra en las colas en algún lugar de nuestros cálculos. Por lo tanto tenemos que tener la máxima información posible sobre la forma de $p[\Delta x]$ describe con mayor precisión las colas. Sin embargo, las colas corresponden a grandes desviaciones de $|\Delta x|$ y que son cada vez más confusas cuando $|\Delta x| \longrightarrow \infty$, del cual podemos tener puntos de datos menos empíricos y así menos información estadística. En conclusión, la volatilidad no es suficiente para clasificar al riesgo y se requiere más información sobre $p[\Delta x]$, ya sea a través de momentos de orden superior o conocimiento detallado de la forma funcional de las colas.

1.2. Volatilidad cuando el cambio entre dos instantes de tiempo sucesivos es variable

Supongamos que el cambio de precio de un derivado son eventos independiente e idénticamente distribuidos (iid), con función de distribución de probabilidad para $\{\Delta x_i\} \equiv \Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_i, ..., \Delta x_n$ y

$$p[\{\Delta x_i\} \equiv \Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_i, ..., \Delta x_n] = p[\Delta x_1]p[\Delta x_2]...p[\Delta x_i]...p[\Delta x_n]. \quad (4)$$

Para el caso en que los cambios de precio de un derivado sea independientes pero no distribuidas idénticamente tenemos en su lugar:

$$p[\{\Delta x_i\} \equiv \Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_i, ..., \Delta x_n] = p_1[\Delta x_1]p_2[\Delta x_2]...p_i[\Delta x_i]...p_n[\Delta x_n]. \quad (5)$$

Puesto que cada variable Δx_i tiene su propia función distribución de probabilidad (FDP) p_i.

El cambio del precio de un derivado a lo largo del tiempo i es $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Por lo tanto, la variación del precio entre los tiempos cero y n está dada por;

$$\begin{aligned}
\Delta x_{n,0} &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + ... + \Delta x_n \\
&= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + ... + (x_n - x_{n-1}) \\
&= x_n - x_0.
\end{aligned}$$

Así el promedio del precio entre cero y n iterados es:

$$\langle \Delta x_{n,0} \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \Delta x_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \Delta x_j \rangle . \quad (6)$$

La ecuación (6) se cumple sin importar que los cambios en el precio Δx_j sean eventos independientes e idénticamente distribuidos. Para el caso en el que cada promedio sea $\langle \Delta x_j \rangle \equiv \langle \Delta x \rangle$ tenemos:

$$\langle \Delta x_{n,0} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \Delta x_j \rangle = n \langle \Delta x \rangle . \quad (7)$$

La varianza en el cambio del precio de un derivado con relación a las iteraciones de tiempo comprendidas entre cero y n se calcula como:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{n,0} &= \left\langle (\Delta x_{n,0} - \langle \Delta x_{n,0} \rangle)^2 \right\rangle \\ &= \langle (\Delta x_{n,0})^2 \rangle - \langle \Delta x_{n,0} \rangle^2 \\ &= \left\langle \left(\sum_{j=1}^n \Delta x_j \right)^2 \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^n \Delta x_j^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta x_i \Delta x_j \right\rangle - \left\{ \sum_{j=1}^n \Delta x_j \right\}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (\Delta x_i)^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \Delta x_i \rangle^2 + \sum_{i \neq j} \langle \Delta x_i \rangle \langle \Delta x_j \rangle . \end{aligned} \tag{8}$$

Por otro lado, si los cambios en el precio Δx_i no están correlacionados, $\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle = \langle \Delta x_i \rangle \langle \Delta x_j \rangle$ para $i \neq j$, la ecuación (8) se simplifica como:

$$\sigma^2_{n,0} = \sum_{i=1}^n \left\langle (\Delta x_i)^2 \right\rangle - \sum_{i=1}^n \langle \Delta x_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ \left\langle (\Delta x_i)^2 \right\rangle - \langle \Delta x_i \rangle^2 \right\} = \sum_{i=1}^n \sigma^2_{i,i-1}. \tag{9}$$

Para el caso en que la varianza sea la misma para cada iterado, $\sigma^2_{i,i-1} \equiv \sigma^2$, tenemos:

$$\sigma^2_{i,i-n} \equiv \sum_{i=1}^n \sigma^2_{i,i-1} = n\sigma^2 \tag{10}$$

donde $\sigma^2_{i,i-n} \equiv \sigma^2_{n,0}$. La ecuación (10) es utilizada con frecuencia en las finanzas y es conocida como la desviación estándar o volatilidad en el precio de un derivado durante un intervalo de n iterados y que aumenta cuando

$$\sigma^2_{i,i-n} \equiv n^{\frac{1}{2}} \sigma. \tag{11}$$

Tenga en cuenta que en el límite opuesto donde todos los cambios en el precio Δx_i están correlacionadas y que todos ellos tienen el mismo valor y signo, Δx, entonces se sigue que

$$\begin{aligned} \sigma^2_{i,i-n} &\equiv \langle (\Delta x_{n,0} - \langle \Delta x_{n,0} \rangle)^2 \rangle \\ &= \left\langle (\Delta x^2_{n,0} \right\rangle = \langle \Delta x_{n,0} \rangle^2 = \langle (n\Delta x)^2 \rangle - \langle n\Delta x \rangle^2 \\ &= n^2 (\langle (\Delta x)^2 \rangle - \langle \Delta x \rangle^2) \\ &= n^2 \sigma^2 \end{aligned} \tag{12}$$

y por lo tanto, la volatilidad en el precio después n iterados aumenta como:

$$\sigma_{i,i-n} = n\sigma. \tag{13}$$

2. Análisis y dinámica del modelo de Black - Scholes

2.1. Ecuación diferencial estocástica para la evolución del precio de un derivado

Consideremos el precio de un derivado con iteración de tiempo i dado por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Denotamos por $\sigma \Delta X_i$ como el cambio en el precio del derivado, donde σ es la desviación estándar o volatilidad que controla el tamaño de paso y ΔX_i es una variable estocástica que describe el resultado para cada iterado i. Por otro lado, suponemos que dicha variable sean eventos independientes con distribución idéntica, lo cual se sigue que $\Delta x = \sigma \Delta X$. Se asume que el incremento en x es tan pequeño que puede ser reemplazado por $\Delta x \to \mathrm{d}x$, y similarmente $\Delta X \to \mathrm{d}X$. Por lo tanto, tenemos una ecuación diferencial estocástica que describe la evolución del precio de dicho derivado de la forma:

$$\mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}X. \tag{14}$$

En las finanzas, suponemos que $\mathrm{d}X$ es una variable aleatoria tomada de una función de distribución de probabilidad de Gauss, esto es,

$$p[\Delta x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}, \tag{15}$$

con media igual a cero y desviación estándar de $(\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$. Al hacerlo, estamos suponiendo que $\mathrm{d}t$ corresponde a un pequeño incremento en el tiempo que es, sin embargo, suficientemente grande para que el Teorema Central del Limite sea válido; es decir, $\mathrm{d}t$ es de alguna manera lo suficientemente grande para $n \longrightarrow \infty$ iteraciones.

Hasta ahora hemos considerado los procesos en el precio de un derivado cuando están conformadas de variables estocásticas. En la teoría financiera estándar, una variable determinística a menudo se incluye para dar una apertura a una posible tendencia total en el mercado, similar al retorno libre del riesgo. Por lo tanto, la ecuación (14) se convierte,

$$\mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}X + \mu \mathrm{d}t \tag{16}$$

donde μ es un término de sesgo determinista, es decir, es una medida del crecimiento promedio del precio del derivado. Podemos integrar la ecuación (16) para obtener:

$$x(t) = x(0) + \mu t + \phi \sigma \sqrt{t} \tag{17}$$

donde ϕ es una variable aleatoria extraída de una distribución gaussiana con media igual a cero y varianza uno, esto es, $\phi \sim N[0,1]$. La ecuación (17) permite a x cambiar de signo. Por lo tanto podemos considerar los precios del derivado como fracciones, es decir,

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \sigma \mathrm{d}X + \mu \mathrm{d}t, \tag{18}$$

que al momento de integrar da como resultado

$$x(t) = x(0) + \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \phi \sigma \sqrt{t}\right]. \tag{19}$$

2.2. Deducción de la ecuación de Black - Scholes

En esta sección presentamos la deducción y solución de la ecuación Black - Scholes para la valoración de opciones. Nuestro punto de partida es la ecuación diferencial estocástica dada por la ecuación (18) que describe el movimiento del precio de un derivado que comprende de una variable aleatoria y un término deterministico:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \sigma \mathrm{d}X + \mu \mathrm{d}t, \tag{20}$$

donde la variable aleatoria $\mathrm{d}X$ se toma de una función de probabilidad Gaussiana con media cero y varianza $\mathrm{d}t$. Supongamos que en el momento t, el valor actual de la opción es V y el valor actual del derivado es x. No es necesario especificar si se trata de una opción de compra o venta en esta etapa. El punto importante es que V es una función de x y de t, esto es, $V(x,t)$. Así que tenemos un ejemplo de una función para una variable estocástica x. Si estos fueran funciones habituales, entonces usaríamos la expansión habitual de cálculo

$$\mathrm{d}V(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + ... \tag{21}$$

donde los puntos suspensivos son términos de orden superior con respecto a $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}t$. Sabemos que, incluso sin los términos de orden superior, la ecuación (21) funciona bien para las funciones deterministas. Sin embargo, en el caso de funciones estocásticas, las cosas son más complicadas. Dado un valor de t, sólo podemos hacer una afirmación probabilística sobre el valor de x, y, por tanto, de V. La forma correcta de la Ecuación (21), dado que x es una variable estocástica, es

$$\mathrm{d}V(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + ... \tag{22}$$

donde los puntos denotan términos de orden superior. Si conectamos la Ecuación (20) en (22) obtenemos

$$\mathrm{d}V(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x\sigma \mathrm{d}X + x\mu \mathrm{d}t) + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x\sigma \mathrm{d}X + x\mu \mathrm{d}t)^2 \tag{23}$$

donde hemos retirado los puntos suspensivos que representa los términos de orden superior. Por otro lado, si tomamos de la ecuación (23) la siguiente expresión para expandirla y analizar sus términos

$$(x\sigma \mathrm{d}X + x\mu \mathrm{d}t)^2 = x^2\sigma^2(\mathrm{d}X)^2 + 2x^2\sigma\mu(\mathrm{d}X)(\mathrm{d}t) + x^2\mu^2(\mathrm{d}t)^2 \tag{24}$$

deducimos lo siguiente:

- Para el primer termino, esto es $x^2\sigma^2(\mathrm{d}X)^2$, suponemos que el proceso estocástico $\mathrm{d}X$ es un camino aleatorio asociada a una función de distribución de probabilidad cuya desviación estándar es igual a $(\mathrm{d}t)^{1/2}$. Por lo tanto $(\mathrm{d}X)^2$ es de orden $\mathrm{d}t$.

- Para el segundo y tercer termino , esto es $2x^2\sigma\mu(\mathrm{d}X)(\mathrm{d}t)$ y $x^2\mu^2(\mathrm{d}t)^2$, tiene una clara dependencia de orden superior más alto que $\mathrm{d}t$, por lo tanto estos términos se excluyen;

de esta forma, la ecuación (24) puede ser vista como,

$$(x\sigma \mathrm{d}X + x\mu \mathrm{d}t)^2 = x^2\sigma^2 \mathrm{d}t. \tag{25}$$

Colocando la ecuación (25) en (23) tenemos lo siguiente,

$$\mathrm{d}V(x,t) = \left[\sigma x \frac{\partial V}{\partial x}\right] \mathrm{d}X + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \mathrm{d}t, \tag{26}$$

pero todavía tenemos una ecuación estocástica para el precio de la opción $V(x,t)$, es decir, dado el tiempo t y el precio del derivado corriente todavía no podemos obtener un valor único para el precio del derivado V. Nuestro objetivo es obtener un precio único para la opción. Para ello, suponemos que tenemos un portafolio formada por una opción y una cantidad Δ del activo subyacente. El valor del portafolio en el tiempo t es

$$\Pi(x,t) = V(x,t) - \Delta(x,t)x(t), \tag{27}$$

y el valor del portafolio entre el tiempo de t y $t + \mathrm{d}t$ está dada por

$$\mathrm{d}\Pi = \mathrm{d}V - \Delta \mathrm{d}x \tag{28}$$

donde $\mathrm{d}x$ representa los precios de activos, $\mathrm{d}V$ el precio de la opción y $\mathrm{d}\Pi$ el valor de la función de portafolio. Tenga en cuenta que el importe del activo que tenemos en el momento t no cambia entre el tiempo de t y $t + \mathrm{d}t$ dado que no es importante saber qué va a pasar con el precio de los activos $x(t)$; así, Δ se mantiene constante en el intervalo de tiempo $t + dt$. Ahora podemos sustituir la ecuación (26) en (28) para tener

$$\mathrm{d}\Pi = \sigma x \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] \mathrm{d}X + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \mathrm{d}t - \Delta \mathrm{d}x, \tag{29}$$

y la ecuación (20) en (29) para dar

$$\mathrm{d}\Pi = \sigma x \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right] \mathrm{d}X + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \mathrm{d}t - \Delta x \left[\sigma \mathrm{d}X + \mu \mathrm{d}t\right], \tag{30}$$

y simplificado esta ecuación tenemos

$$\mathrm{d}\Pi = \sigma x \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \Delta\right] \mathrm{d}X + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta x\right] \mathrm{d}t. \tag{31}$$

El factor $\left[\frac{\partial V}{\partial x} - \Delta\right]$ es un término muy importante debido a que controla el elemento estocástico en el portafolio $\mathrm{d}\Pi$ y por lo tanto el riesgo del mismo. A pesar de que la ecuación (31) parece seguir un proceso estocástico, podemos eliminar este término si podemos diseñar la siguiente condición en cada momento t:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{32}$$

Suponemos que la condición en la ecuación (32) se cumple exactamente en cada valor de t. Entonces la ecuación (31) se convierte en

$$\mathrm{d}\Pi = \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta x\right] \mathrm{d}t. \tag{33}$$

Sustituyendo la ecuación (32) en (33) tenemos

$$\mathrm{d}\Pi = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \mathrm{d}t, \tag{34}$$

lo cual es una ecuación completamente determinista para el valor del portafolio en cada tiempo t. En otras palabras, no existe un término aleatorio $\mathrm{d}X$ que afecta el valor del portafolio y su riesgo ha sido eliminado.

Ahora, imaginemos que no hemos adquirido el activo subyacente, y en su lugar hemos elegido la opción de riesgo donde el capital ha sido invertido en un banco de reconocido prestigio. En este caso, nuestro portafolio aumenta el valor durante el mismo período de tiempo $t \longrightarrow t + \mathrm{d}t$, por una cantidad

$$\mathrm{d}\Pi = r\Pi \mathrm{d}t,$$

donde r es la variable que representa la tasa de interés libre de riesgo. Aplicando dicha igualdad en la ecuación (34) tenemos

$$r\Pi \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \mathrm{d}t, \tag{36}$$

y sustituyendo las ecuaciones (27) y (32) en (36) resulta

$$r\left[V - x\frac{\partial V}{\partial x}\right] \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \mathrm{d}t. \tag{37}$$

Queremos que el resultado sea válido para todo tiempo t durante la vida de la opción, por lo tanto, multiplicando por $\mathrm{d}t$ en ambos lados de la ecuación (37) podemos cancelar los términos $\mathrm{d}t$. Esto da la ecuación

$$r\left[V - x\frac{\partial V}{\partial x}\right] = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] \tag{38}$$

equivalente a,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rx\frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0 \tag{39}$$

A esta ecuación se le conoce como el modelo de Black- Scholes.

Por otro lado, para resolver esta ecuación tenemos que conocer las condiciones de contorno, el cual definen qué tipo de opción estamos considerando.

Para una opción europea de venta (opción call) de las acciones en una fecha futura, las condiciones de contorno son

$$V(x,T) = \max(x-K,0), \qquad V(0,T)=0, \qquad V(x,t) \longrightarrow x, \;\; x \longrightarrow \infty \tag{40}$$

donde K es el precio skipe o de ejercicio y T es el tiempo anual del contrato a ejercer. La solución es de la forma,

$$V(x,T) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} \mathrm{e}^{1/2y^2} \mathrm{d}y - \frac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} \mathrm{e}^{1/2y^2} \mathrm{d}y \tag{41}$$

con

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad d_2 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{X}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{42}$$

y graficamente la solución de la opción europea para la venta como una función $V(x,t)$ de x tiene la siguiente forma:

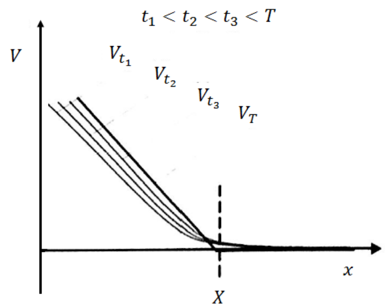

Figura 1: **Solución de la opción Europea para la venta**

Para una opción europea de compra de las acciones de una fecha futura, las condiciones de contorno son

$$V(x,T) = \max(x-X,0), \qquad V(0,T) = X\mathrm{e}^{-r(T-t)}, \qquad V(x,t) \longrightarrow 0, \;\; x \longrightarrow \infty \tag{43}$$

cuya solución es:

$$V(x,T) = \frac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2} \mathrm{e}^{1/2y^2} \mathrm{d}y - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_1} \mathrm{e}^{1/2y^2} \mathrm{d}y \tag{44}$$

y graficamente esto es,
La estrategia de cobertura para la opción europea de compra

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} \mathrm{e}^{1/2y^2} \mathrm{d}y \tag{45}$$

tiene la siguiente forma:

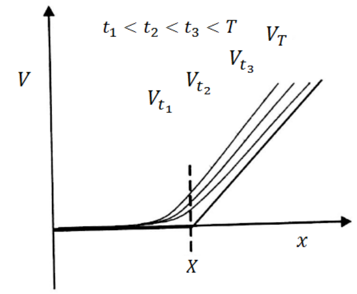

Figura 2: **Solución de la opción Europea de compra**

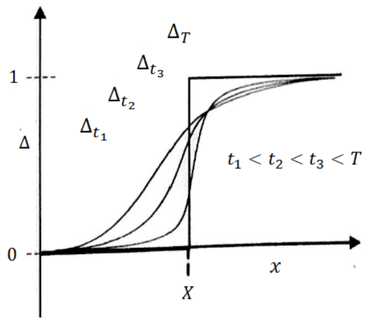

Figura 3: **Estrategia de cobertura para la opción Europea de compra**

2.3. Sensibilidad respecto a los parámetros

El modelo de Black-Scholes deja clara su dependencia con respecto a los parámetros (x, K, r, T, σ). Aquí se trata de exponer lo que pasa al fijar cuatro parámetros y permitir variar uno de ellos.

2.3.1. Sensibilidad respecto a T

Uno de los parámetros de los que depende el precio de la opción es T, la fecha de vencimiento de esta. Se analizará el siguiente ejemplo donde la fecha de vencimiento toma diferentes valores y se vera que sucede con el precio de la opción.

- $x =$\$ $15,557$;
- $K =$\$ $13,557$;
- $T = 0,083; 0,166; 0,25; 0,333; ...; 1$;
- $r = 0,07214344608$;
- $\sigma_E = 0,0003$
- $\sigma_P = 0,0465$

Como se puede observar en el Cuadro 1, el precio de la opción se incrementa cuando T aumenta.

T	$V(x,T)$ Ecopetrol	$V(x,T)$ Pacific Rubiales
0.083	2.08	1.741
0.166	2.161	2
0.25	2.242	2.168
0.333	2.321	2.2858
1	2.94406	2.94406

Cuadro 1: **Sensibilidad de datos con respecto a T**

La proposición, tomada de [6], formaliza la observación presentada por el ejemplo anterior.

Proposición 1. *El precio de una Opción call europea es una función creciente con respecto a la fecha de vencimiento T.*

Demostración

Se demostrara que $\dfrac{\partial C}{\partial T} > 0$. El precio de la opción es

$$C = s\Phi(d_1) - X\mathrm{e}^{-r(T-t)} \tag{46}$$

donde

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{t^2/2} \mathrm{d}t \tag{47}$$

y

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad d_2 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{X}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{48}$$

Entonces

$$\frac{\partial C}{\partial T} = s\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial T} - X\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial T} - r\Phi(d_2)\right] \tag{49}$$

Por regla de Leibniz se tiene que

$$\frac{\partial \Phi(d_i)}{\partial T} = \Phi^{'}(d_i)\frac{\partial (d_i)}{\partial T}, \quad i = 1, 2 \tag{50}$$

donde

$$\Phi^{'}(d_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{d_i^2/2}, \tag{51}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial T} &= \frac{2r + \sigma^2}{4\sigma\sqrt{t}} \\ \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial T} &= \frac{2r - \sigma^2}{4\sigma\sqrt{t}} \end{aligned} \tag{52}$$

lo cual resulta que

$$\frac{\partial C}{\partial T} = s\Phi^{'}(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} - X\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[\Phi^{'}(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T} - r\Phi(d_2)\right] \tag{53}$$

Nótese ademas que

$$\frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\sigma^2}{2\sigma\sqrt{t}}, \tag{54}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= \frac{\partial d_2}{\partial T}\left[s\Phi^{'}(d_1) - X\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi^{'}(d_2)\right] + \frac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi^{'}(d_2)\sigma^2}{2\sigma\sqrt{t}} + r\Phi(d_2)X\mathrm{e}^{-r(T-t)} \\ &= s\frac{\partial d_1}{\partial T}\left[\Phi^{'}(d_1) - \frac{X}{s}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi^{'}(d_2)\right] + \frac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi^{'}(d_2)\sigma^2}{2\sigma\sqrt{t}} + r\Phi(d_2)X\mathrm{e}^{-r(T-t)}. \end{aligned} \tag{55}$$

Ahora, observa que

$$r\Phi(d_2)X\mathrm{e}^{-r(T-t)} > 0 \quad \mathbf{y} \quad \frac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi^{'}(d_2)\sigma^2}{2\sigma\sqrt{t}} > 0 \tag{56}$$

como

$$d_1^2 - d_2^2 = 2\ln\frac{s}{X} + 2rT \quad \mathbf{y} \quad \frac{\Phi^{'}(d_1)}{\Phi^{'}(d_2)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(d_2^2 - d_2^2)}. \tag{57}$$

Por lo tanto

$$\frac{\Phi^{'}(d_1)}{\Phi^{'}(d_2)} = \frac{X}{s}\mathrm{e}^{-r(T-t)}, \tag{58}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \Phi^{'}(d_1) - \frac{X}{s}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi^{'}(d_2) &= \Phi^{'}(d_1) - \frac{\Phi^{'}(d_1)}{\Phi^{'}(d_2)}\Phi^{'}(d_2) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{59}$$

sustituyendo (59) en (55) tenemos que

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi^{'}(d_2)\sigma^2}{2\sigma\sqrt{t}} + r\Phi(d_2)X\mathrm{e}^{-r(T-t)} > 0. \tag{60}$$

En resumen, el precio de la opción en función de T es creciente, y, por esta razón, al aumentar la fecha de vencimiento, el precio de la opción aumenta.

2.3.2. Sensibilidad respecto a K

El precio strike es un parámetro que establece la persona que compra la opción y en principio, puede ser un valor arbitrario. Se analiza en el siguiente ejemplo donde este parámetro toma diferentes valores, para ver que sucede con el precio de la opción.

- $x =$\$ 13, 557;
- $K =$\$10 ;\$10,5; ...\$16;

K	$V(x,T)$ Ecopetrol	$V(x,T)$ Pacific Rubiales
10	4.253	4.253
10.5	3.788	3.788
16	0	0.0054

Cuadro 2: **Sensibilidad de datos con respecto a K**

- $T = 1$;
- $r = 0,07214344608$;
- $\sigma_E = 0,0003$
- $\sigma_P = 0,0465$

Según los datos resultantes en el Cuadro 2, el precio de la opción disminuye cuando K aumenta; esta observación se presenta en la tabla anterior, cuando K esta en el intervalo [0; 15,5]

La siguiente proposición, tomada de [6], formaliza la observación presentada por el ejemplo anterior.

Proposición 2. *El precio de una Opción call europea es una función decreciente con respecto al precio strike K.*

Demostración

Basta con demostrar $\dfrac{\partial C}{\partial K} < 0$.

$$\frac{\partial C}{\partial K} = s\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial K} - \mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[K\Phi^{'}(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial K} + \Phi(d_2)\right] \tag{61}$$

como

$$\frac{\partial d_1}{\partial s} = -\frac{1}{K\sigma\sqrt{t}} = \frac{\partial d_2}{\partial s}, \tag{62}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial C}{\partial K} = -\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \ < 0 \tag{63}$$

porque $\Phi^{'}(d_1) - \dfrac{X}{s}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi^{'}(d_2) = 0$ en (59).

2.3.3. Sensibilidad respecto a r

Otro de los parámetros de la formula es r, la tasa de interés libre de riesgo. Se analizara el siguiente ejemplo donde este parámetro toma diferentes valores, para ver que sucede con el precio de la opción.

- $x =$\$ $13,557$;

r	$V(x,T)$ Ecopetrol	$V(x,T)$ Pacific Rubiales
0.005	0	0.000432
0.01	0	0.000615
0.6	5.0191	5.0191

Cuadro 3: **Sensibilidad de datos con respecto a** r

- K =\$15,557;
- $T = 1$;
- $r = 0,005$;$0,01$;$0,6$.
- $\sigma_E = 0,0003$
- $\sigma_P = 0,0465$

En el Cuadro 3 se observa, que el precio se incrementa cuando la tasa de interés aumenta.

La siguiente proposición, tomada de [6], formaliza la observación presentada por el ejemplo anterior.

Proposición 3. *El precio de una Opción call europea es una función creciente con respecto a la tasa de interés libre de riesgo r.*

Demostración

Hay que demostrar que $\dfrac{\partial C}{\partial r} > 0$. Entonces

$$\frac{\partial C}{\partial r} = s\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} - X\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r} - T\Phi(d_2)\right] \tag{64}$$

puesto que

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\sqrt{T}}{\sigma} = \frac{\partial d_2}{\partial r} \tag{65}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial r} &= s\frac{\partial d_1}{\partial r}\left[\Phi'(d_1) - \frac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{s}\Phi'(d_2)\right] + X\mathrm{e}^{-r(T-t)}T\Phi(d_2) \\ &= X\mathrm{e}^{-r(T-t)}T\Phi(d_2) > 0, \end{aligned} \tag{66}$$

porque $\Phi'(d_1) - \dfrac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{s}\Phi'(d_2) = 0$ por (59).

σ	$V(x,T)$ Ecopetrol y Pacific Rubiales
0.005	0.031257
0.1	0.215828
0.15	0.4577
0.20	0.7168
0.25	0.9828
0.30	1.2518

Cuadro 4: **Sensibilidad de datos con respecto a σ**

2.3.4. Sensibilidad respecto a σ

Uno de los parámetros mas importantes para determinar el precio de una opción es la volatilidad σ. Eso es tanto por la influencia en el resultado del cálculo σ como por lo que representa: Cuantifica la variabilidad del precio de la activo subyacente en periodos anuales.

- $x =\$ \ 13,557$;
- $K =\$15,557$;
- $T = 1$;
- $r = 0,072143446$;
- $\sigma_E = 0,05;0,1;0,15$.
- $\sigma_P = 0,05;0,1;0,15$.

En otras palabras, se calcula el precio de una opción aumentando cada vez la volatilidad en cinco centésimas.
Se puede observar en el Cuadro 4, que el precio de la opción se incrementa cuando σ aumenta, tanto para las acciones de las Empresas Ecopetrol y Pacific Rubiales.

La siguiente proposición, tomada de [6], formaliza la observación presentada por el ejemplo anterior.

Proposición 4. *El precio de una Opción call europea es una función creciente con respecto a la volatilidad σ.*

Demostración

Para demostrar que $\dfrac{\partial C}{\partial \sigma} > 0$, se calcula

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = s\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial \sigma} - X\mathrm{e}^{rT}\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial \sigma} = s\Phi'(d_1)\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial \sigma} - X\mathrm{e}^{rT}\Phi'(d_2)\frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial \sigma} \tag{67}$$

puesto que

$$\frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial \sigma} = -\frac{\ln\left(\dfrac{s}{X}\right)}{\sigma^2\sqrt{T}} - \frac{r\sqrt{T}}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\sqrt{T} \tag{68}$$

x	$V(x,T)$ Ecopetrol	$V(x,T)$ Pacific Rubiales
4120	4105.5	4105.5
4125	4110.2	4110.5
4130	4115.5	4115.5

Cuadro 5: **Sensibilidad de datos con respecto a x**

$$\frac{\partial\Phi(d_2)}{\partial\sigma} = -\frac{\ln\left(\frac{s}{X}\right)}{\sigma^2\sqrt{T}} - \frac{r\sqrt{T}}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\sqrt{T} \tag{69}$$

Entonces,

$$\frac{\partial C}{\partial\sigma} = s\frac{\ln\left(\frac{s}{X}\right) + rT}{\sigma^2\sqrt{T}}\left[\frac{X\mathrm{e}^{-rT}}{S}\Phi'(d_2) - \Phi'(d_1)\right] + \frac{s\sqrt{T}}{2}\left[\frac{X\mathrm{e}^{-rT}}{S}\Phi'(d_2) + \Phi'(d_1)\right] \tag{70}$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{\Phi'(d_1)}{\Phi'(d_2)} \tag{71}$$

resulta

$$\frac{\partial C}{\partial\sigma} = s\sqrt{T}\Phi'(d_1) > 0. \tag{72}$$

2.3.5. Sensibilidad respecto a x

El parámetro x del cual depende el modelo de Black-Scholes es importante, ya que es el precio del activo subyacente (acciones de Ecopetrol y Pacific Rubiales)al tiempo en que se va a comprar la opción.

- $x =$\$ 4120;\$ 4125;\$ 4130
- $K =$\$$15,557$;
- $T = 1$;
- $r = 0,072143446$;
- $\sigma_E = 0,0003$;
- $\sigma_P = 0,0465$.

En otras palabras, se calcula el precio de una opción aumentando cada vez el precio inicial del activo subyacente en $0,5$ pesos. Como se ilustra en el Cuadro 5, el precio de la opción se incrementa cada vez que x aumenta.
La siguiente proposición, tomada de [6], formaliza la observación presentada por el ejemplo anterior.

Proposición 5. *El precio de una Opción call europea es una función creciente con respecto x.*

Demostración

Debemos demostrar que $\dfrac{\partial C}{\partial x} > 0$. Para ello calculamos

$$\frac{\partial C}{\partial x} = s\Phi^{'}(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial x} + \Phi(d_1) - X\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial x}, \tag{73}$$

Dado que

$$\frac{\partial d_1}{\partial x} = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T}} = \frac{\partial d_1}{\partial x}, \tag{74}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} &= s\frac{\partial d_1}{\partial x}\left[\Phi^{'}(d_1) - \frac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{x}\Phi^{'}(d_2)\right] + \Phi(d_1) \\ &= \Phi(d_1) \ > 0, \end{aligned} \tag{75}$$

porque $\Phi^{'}(d_1) - \dfrac{X\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{x}\Phi^{'}(d_2) = 0$ por (59).

3. Análisis descriptivo de los precios de cierre de las acciones

En esta sección presentaremos el estudio descriptivo de los datos de las empresas Ecopetrol y Pacific Rubiales, las cuales cotizan en la bolsa de valores de Colombia de donde fueron obtenidos los datos. Cabe resaltar que los datos obtenidos es un histórico diario comprendido entre Junio de 2013 a Junio 2014.

En la siguiente figura se observan las fluctuaciones de los precios de cierre diarios de las acciones de Ecopetrol y Pacific Rubiales.

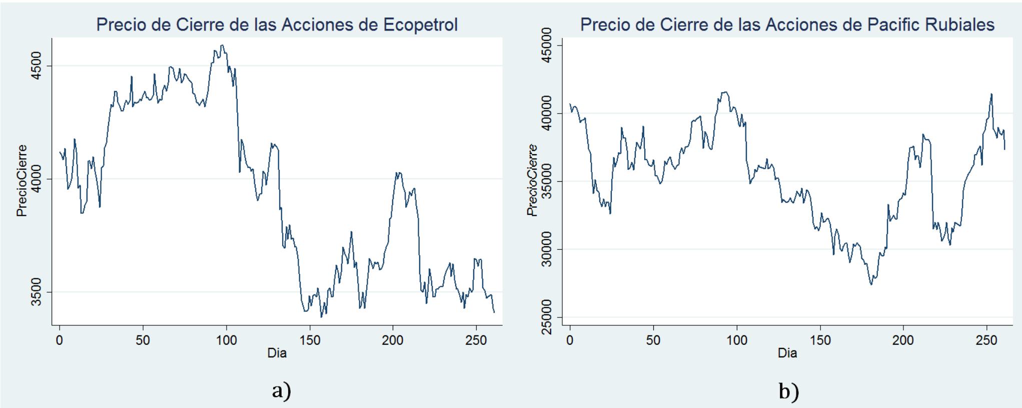

Figura 4: **Precio de cierre diarios de las acciones de a) Ecopetrol, b) Pacific Rubiales.**

Observando la gráfica se puede deducir que inicialmente las Acciones de Pacific Rubiales estuvieron más valorizadas con relación a las de Ecopetrol con una diferencia de 36.600 pesos y al finalizar el periodo ambas empresas decayeron en sus valorizaciones con un porcentaje de 8.3 % y 17.2 % respectivamente. De igual forma las acciones de Pacific Rubiales alcanzaron un máximo de $41620 pesos y un mínimo de $27380 pesos concluyendo que las acciones decrecieron en el transcurso del tiempo pero dichos precios vuelven a aproximarse a su máximo alcanzado en la finalización del periodo. Así mismo Ecopetrol se encontró con un máximo de $4590 pesos y un mínimo de $3390 pesos demostrando que tales acciones decrecieron y se mantienen por debajo del precio máximo alcanzado. Por otro lado, en los cuadros 6 y 7 se muestra los estadísticos descriptivos de dicha base de datos.

Comparando estos estadísticos se concluye que el promedio de los precios de las acciones de Pacific Rubiales es mayor que los precios de cierre de las acciones de Ecopetrol con una diferencia de $31346,57 pero este no es un estadístico confiable puesto que ambas son asimetrícas a la izquierda y derecha respectivamente; así mismo se puede observar que la empresa Pacific Rubiales tiene una mayor variabilidad en sus datos con respecto a Ecopetrol , lo cual con lleva a tener datos más alejados de su media y por lo tanto presentar más saltos crecientes y decrecientes claramente observadas en las Figuras 4.

Descriptivos

			Estadístico	Error típ.
Precio_Cierre_Ecopetrol	Media		3939,54	22,848
	Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	3894,55	
		Límite superior	3984,53	
	Media recortada al 5%		3934,95	
	Mediana		3947,50	
	Varianza		136768,947	
	Desv. típ.		369,823	
	Mínimo		3390	
	Máximo		4590	
	Rango		1200	
	Amplitud intercuartil		751	
	Asimetría		,129	,150
	Curtosis		-1,432	,300

Cuadro 6: **Estadístico descriptivo de los precio de cierre diarios de las acciones de Ecopetrol**

Descriptivos

			Estadístico	Error típ.
Precio_Cierre_Pacific	Media		35286,11	210,662
	Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	34871,29	
		Límite superior	35700,92	
	Media recortada al 5%		35338,79	
	Mediana		35900,00	
	Varianza		11627153,368	
	Desv. típ.		3409,861	
	Mínimo		27380	
	Máximo		41620	
	Rango		14240	
	Amplitud intercuartil		5315	
	Asimetría		-,255	,150
	Curtosis		-,778	,300

Cuadro 7: **Estadístico descriptivo de los precio de cierre diarios de las acciones de Pacific Rubiales**

4. Pronostico de los precios de cierre de las acciones diarios de Ecopetrol y Pacific Rubiales

Dado el modelo de Black-Scholes mencionado en la sección 2,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rx\frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0 \tag{76}$$

es necesario calcular el valor de sus parámetros σ, r, y K (x y T se pueden establecer de manera libre) mediante la base de datos suministrada de las empresas de Ecopetrol y Pacific Rubiales, esto con el fin de pronosticar el precio de la opción en cuestión y poder establecer diferencias significativas. Por otra parte, para cada una de las empresas, se obtendrá el valor de una opción fijando cuatro parámetros y variando uno de ellos; esto nos permitirá ver el comportamiento del precio de la opción al variar los parámetros y establecer diferencias. Finalmente, se tomara como precio del subyacente uno de esos valores de los datos recopilados para cada una de las empresas y proponer una fecha de vencimiento T de tal forma que el precio de la acción en T sea conocida y así determinar cual de las dos empresas es conveniente establecer un contrato, ademas de saber de cuanto se hubiese ganado (o perdido) por la realización del contrato opción.

Para ello, suponemos una tasa libre de interés anual dada por $r = 2\,\%$ que llevado a una tasa de interés diaria da como resultado $r = 0,072\,\%$; ademas suponemos que el precio de ejercicio K se tomara como $K = x\pm$ \$2. Por otro lado, para calcular el valor de la volatilidad ligada a los precios diarios de dichas acciones es necesario aplicar una transformación Box-Cox, dependiendo de un estadístico λ, para que los datos sigan una distribución normal. Observando en la Figura 7.1 tenemos que el valor máximo de λ para los datos de Ecopetrol y Pacific Rubiales son$\lambda = -0{,}42$ y $\lambda = 0,92$ respectivamente.

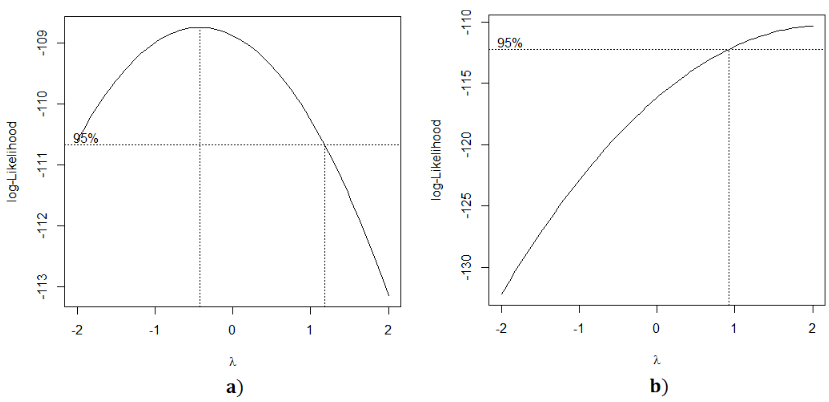

Figura 5: **Estimación de λ para los datos de a) Ecopetrol, b) Pacific Rubiales.**

Aplicando la mejor transformación Box-Cox, a través de un código de programación R, se tienen los siguientes gráficos en comparación con los datos reales, apreciada en la figura 6. Por otro lado, analizando los residuales entre los datos reales y transformados de ambas empresas se siguen que estas presentan una distribución normal claramente reflejada en la figura 7.

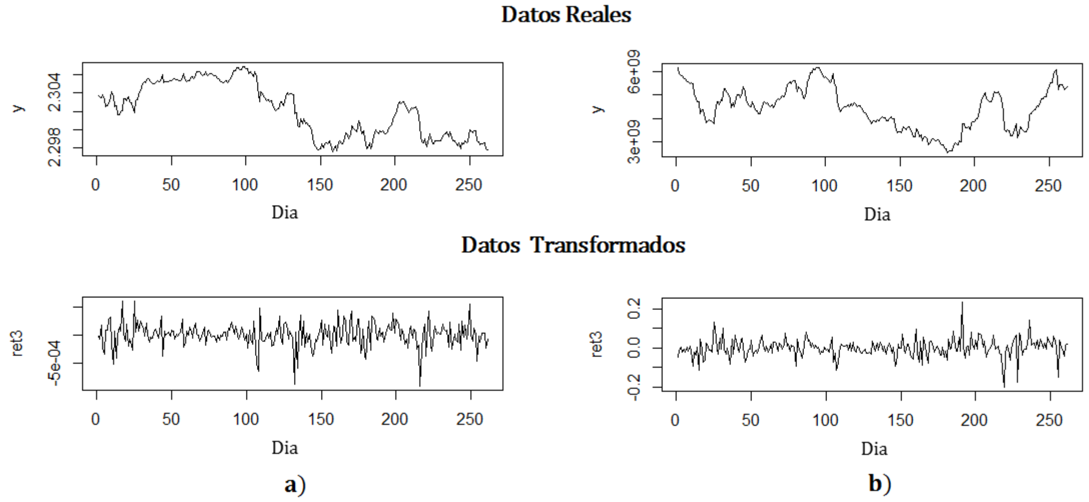

Figura 6: **Datos reales vs transformados de a) Ecopetrol, b) Pacific Rubiales.**

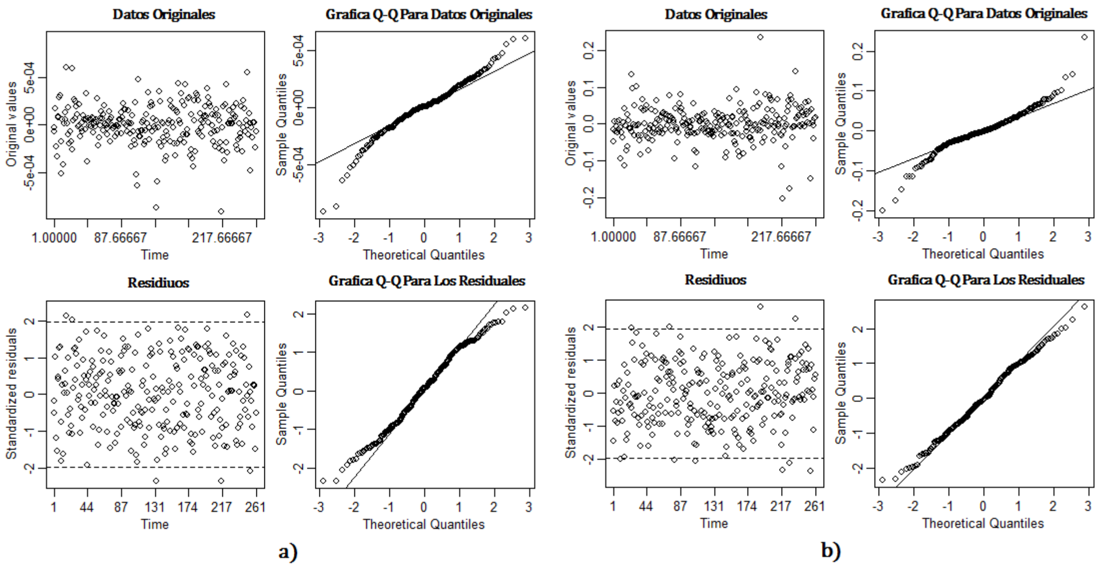

Figura 7: **Residuales entre datos reales y transformados de a) Ecopetrol, b) Pacific Rubiales.**

La volatilidad del activo subyacente de ambas empresas, se tomara como la desviación estándar de los datos transformados; es así, que la volatilidad para Ecopetrol esta dada por $\sigma_E = 0{,}0003$ y la de Pacific Rubiales $\sigma_P = 0{,}0465$.

Para ilustrar la aplicación del modelo de Black - Scholes, utilizando un código de programación en R que sera mostrado al final del trabajo, en el calculo de los valores de las opciones de las empresas de Ecopetrol y Pacific Rubiales, $V_E(x, T)$ y $V_P(x, T)$ respectivamente, planteamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. Suponga que se quiere realizar un contrato opción del tipo call europea en una de las empresas mencionadas anteriormente en base a la siguiente información:

- $x =$\$ 13557;
- $K =$\$ 11557;
- $T = 1$;
- $r = 0{,}07214344608$;
- $\sigma_E = 0{,}0003$
- $\sigma_P = 0{,}0465$

¿Cuales son los valores de la opción de ambas empresas?.

Utilizando la formula de Black-Scholes obtenida en la sección anterior determinamos que el valor de dichas opciones están dadas por:

- $V_E(13557, 1) =$\$2549,79
- $V_P(13557, 1) =$\$2784,24

lo cual implica que el precio del activo subyacente de \$13557 y con el precio Strike establecido de \$11557, el poseedor de la opción deberá pagar \$2549.79 para la realización del contrato con Ecopetrol y \$2784.24 para Pacific Rubiales.

Notese lo siguiente:

- El precio de la opción call europea que se ha determinado es solo para una acción, si el contrato es para un numero fijo k de acciones, entonces el precio total se obtiene multiplicando c por el precio de la opción call europea que se calculó para el caso de una acción, teniendo en cuenta que el precio strike viene dado por cK.
- Si el numero de acciones que se fijan en la opción es c, con $\widehat{x} = ck$ (el nuevo precio del activo subyacente), pero el precio strike no está dado por cK, entonces, se sustituyen estos nuevos valores en la formula de Black-Scholes para determinar el nuevo precio de la opción call europea.

Ejemplo 2. Suponga que $c = 10$, esto es, la opción que se está negociando involucra 10 acciones y se quiere determinar el valor de una opcion call europea con los siguientes valores:

- $x =$\$ 13557;
- $K =$\$ 11557;
- $T = 1$;
- $r = 0{,}07214344608$;

- $\sigma_E = 0{,}0003$
- $\sigma_P = 0{,}0465$

Utilizando la formula de Black-Scholes obtenida en la sección anterior determinamos que el valor de dichas opciones están dadas por:

- $1000V_E(13557, 1) = 1000\times\$2549{,}795 = 254979{,}5$
- $1000V_P(13557, 1) = 1000\times\$2784{,}244 = 2784244{,}4$

lo cual implica que el precio del activo subyacente de \$13557 y con el precio Strike establecido de \$11557, el poseedor de la opción deberá pagar \$2549,79 para las 10 acciones con Ecopetrol y \$2784,24 para Pacific Rubiales.

¿Cuanto se gana o (pierde) realmente por una opción call europea? Suponga que se quiere comprar una opción call europea con activo subyacente para las acciones de Ecopetrol y Pacific Rubiales. El contrato se establece el primer dia en que efectúa operaciones en la BVC, en nuestro caso el mes de Junio de 2013, en ese día, el precio de las acciones fueron $x = \$4120 \;\; y$ x=\$ 41900 respectivamente. El contrato se establece a un año $T = 1$ con un precio Strike de K_E =\$ 2120 y K_P =\$ 39900,ademas, se estima que la volatilidad es $\sigma_E = 0{,}0003$, $\sigma_P = 0{,}0465$ y una tasa de interés libre de riesgo de $r = 0{,}07214344608$. Los precios a pagar por dichas opciones son \$2147,55 para Ecopetrol y \$4779,67 para Pacific Rubiales. Ya llegada la fecha de vencimiento de la opcion, el propietario de esta decide si ejerce o no dicho contrato; se da cuenta que el precio de la acción es de \$3480 para Ecopetrol y \$37460 para Pacific Rubiales, primer precio correspondiente al mes de Junio de 2014 (Anexo 1). Como se puede observar, al poseedor de la opcion no le conviene ejercerla, puesto que las acciones se comprarían a $x = \$4120 \;\; y$ x=\$ 41900 respectivamente. En las acciones de Ecopetrol implica una de perdida de \$640 y en las acciones de Pacific Rubiales de \$4440. ¿Cuanto es lo que gana o pierde realmente? Para contestar esta pregunta, se tiene que tomar en cuenta el valor futuro a un año del precio de la opcion, para Ecopetrol es $2147,55\times \mathrm{e}^{0{,}07214} = 2308,1992$ y la ganancia o perdida real se obtiene de $640-2308,1992 = -1668,19$, y para Pacific Rubiales $4779,67\times \mathrm{e}^{0{,}07214} = 4772,1542$ y la ganancia o perdida real es $4440 - 4772,1542 = -332,15$. Por lo tanto el riesgo existe en ambas empresas al momento de invertir, pero una en menor de proporción que la otra.

Conclusiones

Se ha realizado una aplicación del modelo de Black - Scholes a las fluctuaciones de las acciones de los precios de cierre de las empresas de Ecopetrol y Pacific Rubiales durante el periodo Junio de 2013 a Junio de 2014, el cual solo determina los valores de sus opciones a futuro, mas no pronostica el precio de sus acciónes para un tiempo T. Por otro lado, al analizar el comportamiento de los parámetros que influyen el modelo con relación al precio de la opción, se deduce que al aumentar el tiempo de pronostico entonces el precio de la opción aumenta, al aumentar el precio de la acción se tiene que el valor de la opción tiende a disminuir, cuando la volatilidad aumenta el precio de la opción aumenta y finalmente, el precio de la opción aumenta cuando la tasa de interés aumenta.

Con relación al comportamiento de las fluctuaciones de las empresas para así analizar sus diferencias y poder determinar cual de las dos tiene un mejor pronostico al momento de invertir, tenemos dos opciones:

- Si el valor de la acciones de ambas empresas analizadas son iguales, entonces el precio de la opción de Pacific Rubiales es mayor que la de Ecopetrol, puesto que su volatilidad es mucho mayor que la otra.

- Si el precio de la acción difiere de la una a la otra, las ganancias o perdidas en las opciones para tomar después la mejor decisión financiera depende del valor de K, esto es, si $x(T) \geq K$, donde $x(T)$ es el precio de la acción futura conocida, conviene ejercer la opción e implica una ganancia por la compra del subyacente de $x(T) - K$. Si se toma en cuenta lo que se paga por la opción pero llevada a valor futuro T, entonces, se gana realmente (o posiblemente sea perdida) $x(T) - K - V(x(t), T)e^{rT}$. Por otra parte, si $K < x(T)$ no conviene ejercer la opción, lo cual implica una perdida de $V(x(t), T)e^{rT}$ por la compra de dicho contrato.

En el estudio se comprueba que al momento de compra de una opción el riego existe en ambas empresas, en este caso, para el periodo analizado la Empresa Pacific Rubiales presenta una menor proporción de riesgo.

Recomendaciones

Para futuros trabajo se recomienda, realizar un análisis comparativo entre el modelo Binomial y Black Scholes para valuar una opción call europea en tiempo discreto y continuo, respectivamente.

Referencias

[1] Kozikowski Zarska, Zbigniew. *Matemáticas financieras: el valor del dinero en el tiempo.* McGraw-Hill. (2007).

[2] J. L. Benito Castillo. *El modelo de Black-Scholes de valoración de opciones financieras.* Universidad de Barcelona. Barcelona (2012).

[3] J. A. Díaz Contrerasa, G. I. Macias Villalba, E. Luna González. *Estrategia de cobertura con productos derivados para el mercado energético colombiano.* Estudios Gerenciales. Vol. 30, Núm. 130. ISSN: 0123-5923.

[4] J.P. Fouque, G. Papanicolau, K. Ronnie Sircar. *Derivatives In Financial Markets With Stochastic Volatility.* Cambridge University Press. ISBN: 0521791634.

[5] J. F. Neil, J. Paul, M. H. Pak. *Financial Market Complexity.* Oxford Finance, New York. 2010.

[6] A. Vazquez. *Valuación de una Opción Call Europea: Modelo de de Black-Scholes y una Aplicación.* Pachuca, Hidalgo. 2008.

[7] J. Serrano, J. Villareal. *Fundamentos de Finanzas.* McGraw-Hill. Segunda Edición. Colombia. (1993). ISBN: 958-600-141-5.

[8] J. A. Garcia. *Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita.* Pearson educación. Quinta edición. Colombia (2008). ISBN: 978-958-699-100-1.

[9] C. H. Daniel. *Estudio y Aplicaciones de Black – Scholes.* Universidad de Buenos Aires. (2007)

[10] S. Farlow. *Partial Differential Equations.* Dover Publicationes, New York. (1993).

[11] M. A. Miras. *Matematicas en Wall Street: la formulación de Black - Scholes.*

[12] R.J.Elliott, P.E.Kopp. *Mathematics of Financial Markets.* Springer - Verlag, New Yourk. (1999)

[13] Bolsa de Valores de Colombia: `http://www.banrep.gov.co/`

Anexos

Anexo 1. Precios de cierre diarios de las acciones de Ecopetrol y Pacific Rubiales comprendidos entre Junio de 2013 a Julio de 2014.

Fecha	Precio de Cierre Ecopetrol	Precio de Cierre Pacific Rubiales
30/07/2013 00:00:00	4305	36280
31/07/2013 00:00:00	4335	37400
01/08/2013 00:00:00	4350	38000
02/08/2013 00:00:00	4330	38000
05/08/2013 00:00:00	4345	37640
06/08/2013 00:00:00	4455	38300
08/08/2013 00:00:00	4320	39180
09/08/2013 00:00:00	4340	38520
12/08/2013 00:00:00	4335	37280
13/08/2013 00:00:00	4340	36600
14/08/2013 00:00:00	4355	36380
15/08/2013 00:00:00	4345	36280
16/08/2013 00:00:00	4370	36940
20/08/2013 00:00:00	4390	36200
21/08/2013 00:00:00	4360	35820
22/08/2013 00:00:00	4360	35600
23/08/2013 00:00:00	4350	35160
26/08/2013 00:00:00	4355	35180
27/08/2013 00:00:00	4370	35700
28/08/2013 00:00:00	4465	36740
29/08/2013 00:00:00	4385	36940
30/08/2013 00:00:00	4335	36660
02/09/2013 00:00:00	4355	36800
03/09/2013 00:00:00	4350	36400
04/09/2013 00:00:00	4395	36240
05/09/2013 00:00:00	4415	36560
06/09/2013 00:00:00	4390	36140
09/09/2013 00:00:00	4425	36600
10/09/2013 00:00:00	4495	37100
11/09/2013 00:00:00	4495	37540
12/09/2013 00:00:00	4490	37260
13/09/2013 00:00:00	4450	37680
16/09/2013 00:00:00	4435	37900
17/09/2013 00:00:00	4445	37800
18/09/2013 00:00:00	4490	38140
19/09/2013 00:00:00	4425	39500
20/09/2013 00:00:00	4440	39660

Fecha	Precio de Cierre Ecopetrol	Precio de Cierre Pacific Rubiales
23/09/2013 00:00:00	4465	40000
24/09/2013 00:00:00	4460	39660
25/09/2013 00:00:00	4445	39900
26/09/2013 00:00:00	4435	40060
27/09/2013 00:00:00	4425	40120
30/09/2013 00:00:00	4380	38440
01/10/2013 00:00:00	4375	39180
02/10/2013 00:00:00	4340	39000
03/10/2013 00:00:00	4335	38740
04/10/2013 00:00:00	4325	37840
07/10/2013 00:00:00	4340	37420
08/10/2013 00:00:00	4355	38380
09/10/2013 00:00:00	4320	39780
10/10/2013 00:00:00	4360	40400
11/10/2013 00:00:00	4385	41160
15/10/2013 00:00:00	4460	41240
16/10/2013 00:00:00	4515	41700
17/10/2013 00:00:00	4515	41620
18/10/2013 00:00:00	4570	41880
21/10/2013 00:00:00	4565	41860
22/10/2013 00:00:00	4535	41880
23/10/2013 00:00:00	4540	41300
24/10/2013 00:00:00	4590	40940
25/10/2013 00:00:00	4590	40500
28/10/2013 00:00:00	4555	40600
29/10/2013 00:00:00	4555	40400
30/10/2013 00:00:00	4470	40240
31/10/2013 00:00:00	4500	39800
01/11/2013 00:00:00	4470	39980
05/11/2013 00:00:00	4410	41000
06/11/2013 00:00:00	4490	39660
07/11/2013 00:00:00	4415	39200
08/11/2013 00:00:00	4235	37200
12/11/2013 00:00:00	4030	35900
13/11/2013 00:00:00	4175	35500
14/11/2013 00:00:00	4150	35840
15/11/2013 00:00:00	4110	36100
18/11/2013 00:00:00	4070	36200
19/11/2013 00:00:00	4050	36300
20/11/2013 00:00:00	4055	36500
21/11/2013 00:00:00	4035	36300
22/11/2013 00:00:00	4045	36700
25/11/2013 00:00:00	3980	36420

Fecha	Precio de Cierre Ecopetrol	Precio de Cierre Pacific Rubiales
26/11/2013 00:00:00	3925	36880
27/11/2013 00:00:00	3905	36660
28/11/2013 00:00:00	3935	36280
29/11/2013 00:00:00	3935	36400
02/12/2013 00:00:00	4035	36400
03/12/2013 00:00:00	4025	36060
04/12/2013 00:00:00	3975	35600
05/12/2013 00:00:00	4030	35320
06/12/2013 00:00:00	4100	35200
09/12/2013 00:00:00	4160	34740
10/12/2013 00:00:00	4135	34320
11/12/2013 00:00:00	4155	34000
12/12/2013 00:00:00	4145	33480
13/12/2013 00:00:00	4130	33980
16/12/2013 00:00:00	3865	34020
17/12/2013 00:00:00	3875	33740
18/12/2013 00:00:00	3705	34100
19/12/2013 00:00:00	3695	33940
20/12/2013 00:00:00	3790	34360
23/12/2013 00:00:00	3735	34620
24/12/2013 00:00:00	3800	34380
26/12/2013 00:00:00	3735	34500
27/12/2013 00:00:00	3740	34020
30/12/2013 00:00:00	3700	34000
02/01/2014 00:00:00	3700	34360
03/01/2014 00:00:00	3650	34600
07/01/2014 00:00:00	3550	34200
08/01/2014 00:00:00	3465	34280
09/01/2014 00:00:00	3445	32880
10/01/2014 00:00:00	3415	31740
13/01/2014 00:00:00	3415	32000
14/01/2014 00:00:00	3425	31940
15/01/2014 00:00:00	3485	31900
16/01/2014 00:00:00	3440	32900
17/01/2014 00:00:00	3485	32800
20/01/2014 00:00:00	3490	32420
21/01/2014 00:00:00	3480	32680
22/01/2014 00:00:00	3520	32980
23/01/2014 00:00:00	3470	32600
24/01/2014 00:00:00	3390	31900
27/01/2014 00:00:00	3425	31100
28/01/2014 00:00:00	3455	31120
29/01/2014 00:00:00	3405	32480

Fecha	Precio de Cierre Ecopetrol	Precio de Cierre Pacific Rubiales
30/01/2014 00:00:00	3510	32080
31/01/2014 00:00:00	3520	31000
03/02/2014 00:00:00	3480	31480
04/02/2014 00:00:00	3480	30220
05/02/2014 00:00:00	3560	31000
06/02/2014 00:00:00	3620	31160
07/02/2014 00:00:00	3590	30680
10/02/2014 00:00:00	3540	29580
11/02/2014 00:00:00	3590	30000
12/02/2014 00:00:00	3700	30460
13/02/2014 00:00:00	3670	30780
14/02/2014 00:00:00	3655	30500
17/02/2014 00:00:00	3625	30360
18/02/2014 00:00:00	3695	30500
19/02/2014 00:00:00	3770	30500
20/02/2014 00:00:00	3680	29980
21/02/2014 00:00:00	3610	29480
16/12/2013 00:00:00	3865	34020
17/12/2013 00:00:00	3875	33740
18/12/2013 00:00:00	3705	34100
16/12/2013 00:00:00	3865	34020
17/12/2013 00:00:00	3875	33740
18/12/2013 00:00:00	3705	34100
28/02/2014 00:00:00	3500	28360
03/03/2014 00:00:00	3430	28300
04/03/2014 00:00:00	3510	28260
05/03/2014 00:00:00	3585	29380
06/03/2014 00:00:00	3650	30000
07/03/2014 00:00:00	3630	29760
10/03/2014 00:00:00	3605	29540
11/03/2014 00:00:00	3635	30300
12/03/2014 00:00:00	3625	30060
13/03/2014 00:00:00	3635	33460
14/03/2014 00:00:00	3600	33500
17/03/2014 00:00:00	3605	32720
18/03/2014 00:00:00	3625	32740
19/03/2014 00:00:00	3675	32860
20/03/2014 00:00:00	3700	32320
21/03/2014 00:00:00	3720	33520
25/03/2014 00:00:00	3825	33780
26/03/2014 00:00:00	3830	33700
27/03/2014 00:00:00	3910	34300
28/03/2014 00:00:00	3975	34200

Fecha	Precio de Cierre Ecopetrol	Precio de Cierre Pacific Rubiales
31/03/2014 00:00:00	4030	35420
01/04/2014 00:00:00	4000	36540
02/04/2014 00:00:00	4030	37600
03/04/2014 00:00:00	4025	37700
04/04/2014 00:00:00	3970	38300
07/04/2014 00:00:00	3945	37500
08/04/2014 00:00:00	3875	37100
09/04/2014 00:00:00	3900	36960
10/04/2014 00:00:00	3945	36960
11/04/2014 00:00:00	3925	37360
14/04/2014 00:00:00	3950	38500
15/04/2014 00:00:00	3960	38360
16/04/2014 00:00:00	3885	38300
21/04/2014 00:00:00	3830	38480
22/04/2014 00:00:00	3580	37980
23/04/2014 00:00:00	3510	37420
24/04/2014 00:00:00	3500	35500
25/04/2014 00:00:00	3545	32380
28/04/2014 00:00:00	3450	32080
29/04/2014 00:00:00	3500	32300
30/04/2014 00:00:00	3605	32200
02/05/2014 00:00:00	3555	31300
05/05/2014 00:00:00	3480	31260
06/05/2014 00:00:00	3480	31740
07/05/2014 00:00:00	3515	32440
08/05/2014 00:00:00	3515	33380
09/05/2014 00:00:00	3525	30800
12/05/2014 00:00:00	3525	31900
13/05/2014 00:00:00	3525	32860
14/05/2014 00:00:00	3570	32300
15/05/2014 00:00:00	3595	32140
16/05/2014 00:00:00	3610	32020
19/05/2014 00:00:00	3630	31920
20/05/2014 00:00:00	3570	32700
21/05/2014 00:00:00	3625	34880
22/05/2014 00:00:00	3555	35120
23/05/2014 00:00:00	3515	35400
26/05/2014 00:00:00	3515	35760
27/05/2014 00:00:00	3490	35700
28/05/2014 00:00:00	3455	36380
29/05/2014 00:00:00	3500	36260
30/05/2014 00:00:00	3430	37000
03/06/2014 00:00:00	3490	37500

Fecha	Precio de Cierre Ecopetrol	Precio de Cierre Pacific Rubiales
04/06/2014 00:00:00	3480	37460
05/06/2014 00:00:00	3520	37840
06/06/2014 00:00:00	3500	37720
09/06/2014 00:00:00	3510	38700
10/06/2014 00:00:00	3650	39300
11/06/2014 00:00:00	3645	39760
12/06/2014 00:00:00	3615	39800
13/06/2014 00:00:00	3645	40900
16/06/2014 00:00:00	3645	41500
17/06/2014 00:00:00	3520	41520
18/06/2014 00:00:00	3510	38800
19/06/2014 00:00:00	3475	39500
20/06/2014 00:00:00	3480	39560
24/06/2014 00:00:00	3485	39480
25/06/2014 00:00:00	3490	38760
26/06/2014 00:00:00	3430	39000
27/06/2014 00:00:00	3410	39300

Anexo 2. Código Programación R

Estudio no - parametrico datos de Ecopetrol

```
set.seed(123)
library(stochvol)

datos=read.table("ecopetrol.csv",header=T)
attach(datos)

ret2=logret(Ecopetrol,demean=T)
par(mfrow=c(2,1))
plot(Ecopetrol,type="l")
plot(ret2,type="l")

## Estudio Anova y aplicación del Test Shapiro Will para determinar
la normalidad en los datos

res2=svsample(ret2,priormu=c(-10,1))
summary(res2,showlatent=F)

volplot(res2, forecast = 10)

myresid <- resid(res2)
plot(myresid, ret2)

shapiro.test(myresid)

library(MASS)
library(car)
boxcox(Ecopetrol~1)
p=box.cox.powers(Ecopetrol)
y=box.cox(Ecopetrol,p$lambda)
qqnorm(y)

ret3=logret(y,demean=T)
par(mfrow=c(2,1))
plot(y,type="l")
plot(ret3,type="l")

##Running the sampler

res3=svsample(ret3,priormu=c(-10,1))
summary(res3,showlatent=F)

volplot(res3, forecast = 10)
```

```
myresid <- resid(res3)
plot(myresid, ret3)

shapiro.test(myresid)
```

Estudio no-parametrico datos Pacific Rubiales

```
set.seed(123)
library(stochvol)

datos=read.table(C:"pacific.csv",header=T)
attach(datos)
View(datos)
ret2=logret(Pacific,demean=T)
View(ret2)
par(mfrow=c(2,1))
plot(Pacific,type="l")
plot(ret2,type="l")

## Estudio Anova y aplicación del Test Shapiro Will para determinar
la normalidad en los datos

res2=svsample(ret2,priormu=c(-10,1))
summary(res2,showlatent=F)

volplot(res2, forecast = 10)

myresid <- resid(res2)
plot(myresid, ret2)

shapiro.test(myresid)

library(MASS)
library(car)
boxcox(Pacific~1)
p=box.cox.powers(Pacific)
y=box.cox(Pacific,p$lambda)
qqnorm(y)

ret3=logret(y,demean=T)
par(mfrow=c(2,1))
plot(y,type="l")
plot(ret3,type="l")

##Running the sampler
```

```
res3=svsample(ret3,priormu=c(1,1))
summary(res3,showlatent=F)

volplot(res3, forecast = 10)

myresid <- resid(res3)
plot(myresid, ret3)

shapiro.test(myresid)
```

Aplicación del Modelo de Black Scholes

```
BlackScholes<-function(S,X,r,T,sigma){
values<-c(2)

d1<-(log(S/X)+ (r+sigma^2/2)*T)/sigma*sqrt(T)
d2<- d1 - sigma * sqrt(T)

values[1]<- S*pnorm(d1)- X*exp(-r*T)*pnorm(d2)
values[2]<- X*exp(-r*T) * pnorm(-d2) - S*pnorm(-d1)

values
}
```