
Análisis Numérico del Flujo Turbulento sobre el perfil NACA 1408



LOS LIBERTADORES
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Fundación Universitaria Los Libertadores

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Programa de Ingeniería Aeronáutica

Bogotá D.C, Colombia

2019

Análisis Numérico del Flujo Turbulento sobre el perfil NACA 1408

Presentado por

Daniel Jesús

Martínez

Calderón

LOS LIBERTADORES

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

En cumplimiento parcial de los requerimientos para
optar por el título de

Ingeniero Aeronáutico

Dirigida por

Msc. John Jairo Vaca Ríos

Presentada a

Programa de Ingeniería Aeronáutica

Fundación Universitaria Los Libertadores

Bogotá D.C, Colombia.

Notas de aceptación



LOS LIBERTADORES

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Bogotá DC, 2019



LOS LIBERTADORES

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Las directivas de la Fundación Universitaria Los Libertadores, los jurados calificadores y el cuerpo docente no son responsables por los criterios e ideas expuestas en el presente documento. Estos corresponden únicamente a los autores y a los resultados de su trabajo.

Dedicatoria



LOS LIBERTADORES

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Este Proyecto está dedicado a Dios en primer lugar por la oportunidad de llegar a esta instancia de la vida y a mi familia por su apoyo incondicional a lo largo del camino.

Agradecimientos



LOS LIBERTADORES

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Agradezco a quienes me transmitieron la pasión por la aeronáutica, a todos los maestros involucrados en mi formación académica presencial especialmente a los que me despertaron el amor por la aerodinámica.

A los doctores en filosofía Aidan Wimshurst del departamento de ciencias de la ingeniería perteneciente a la universidad de Oxford y al doctor Suman Chakraborty perteneciente al departamento de ingeniería mecánica del instituto tecnológico de la India Kharagpur, por compartir virtualmente sus conocimientos sin los cuales hubiera sido muy complicado acercarse a la temática tratada.

A la plataforma de aprendizaje Edx.org por los cursos virtuales gratuitos que ofrecen a nivel mundial, a partir de los cuales se confeccionó el proyecto.

Índice general

1	Introducción	1
2	Planteamiento del Problema	2
2.1	Objetivos	3
2.1.1	Objetivo General	3
2.1.2	Objetivos Específicos	3
2.2	Justificación	4
3	Marco Teórico	5
3.1	Importancia de los datos experimentales en la consolidación de los modelos turbulentos	5
3.2	Ecuaciones Gobernantes de los fluidos	
3.2.1	Forma Integral	6
3.2.2	Forma Diferencial	6
3.3	Conceptos fundamentales que evitan el uso de Ansys Fluent como una caja negra misteriosa	7
3.4	Flujo Turbulento y su descripción estadística	11
3.4.1	Ecuaciones Navier-Stokes promediadas (RANS) y aparición del esfuerzo turbulento	12
3.4.2	Vorticidad de los remolinos (eddy) en un flujo turbulento	13
4	Metodología Aplicada	15
4.1	Elección del modelo turbulento y su relación con la capa límite	15
4.1.1	Componentes de la capa límite y variación de velocidad en dicha zona	15
4.1.2	Modelos Turbulentos	17
4.2	Modelos basados en la viscosidad eddy y su relación con la ecuación de la energía cinética turbulenta (k)	18
4.3	Explicación Modelo SST $k-\omega$	22
5	Análisis y Resultados	25
5.1	Reportes de Ansys Fluent	26
5.1.1	Dominio y condiciones de frontera	26
5.1.2	Enmallado y manejo de la capa límite	28
5.1.3	Reporte de Residuales	29

5.2 Validación numérica de los coeficientes aerodinámicos experimentales pertencientes al perfil NACA 1408.....	29
5.3 Contornos del perfil a un ángulo de ataque de 10 grados.....	32

6 Conclusiones y Recomendaciones.....	33
--	-----------

Índice de figuras

3.1 Tipos de movimiento y deformación que experimenta un elemento de fluido.....	7
3.2 Ansys Fluent como caja negra.....	7
3.3 Relación entre celdas adyacentes para desarrollar las ecuaciones algebraicas.....	8
3.4 Escalas de longitud de la turbulencia y transferencia de energía.....	11
3.5 Componentes de velocidad vs tiempo.....	12
4.1 Partes de la capa límite.....	15
4.2 Clasificación de los modelos turbulentos.....	18
4.3 Función de mezcla en las celdas del dominio.....	22
4.4 Transición entre modelos mediante la tangente hiperbólica.....	23
4.5 Distancia desde la pared al centro de la celda.....	23
5.1 Coeficientes aerodinámicos del perfil NACA 1408.....	25
5.2 Zonas del dominio para el análisis.....	26
5.3 Tipos de malla.....	28
5.4: Reporte del valor y^+ promedio sobre la superficie del perfil NACA 1408.....	28
5.5 Reporte tasa neta del flujo másico en el dominio.....	29
5.6 Gráfica de Residuales vs Número de iteraciones.....	29
5.7 Contornos de velocidad y presión perfil NACA 1408.....	32
5.8 Contornos asociados a la turbulencia.....	32

Abreviaturas

B_{sis} Propiedad extensiva del sistema.

δS Pequeño elemento diferencial de área.

\hat{n} Vector normal a la superficie.

\vec{V} Vector de velocidad.

δv Pequeño elemento diferencial de volumen.

S_{ij} Tensor que indica la tasa de deformación media.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

μ Viscosidad Molecular.

μ_t Viscosidad dinámica turbulenta.

ν Viscosidad cinemática molecular.

ν_t Viscosidad cinemática turbulenta.

τ_w Esfuerzo cortante en la pared.

τ_{ij} Esfuerzo Reynolds específico. $\overline{u'_i u'_j}$

Ω_{ij} Tensor de la tasa de rotación media, $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$.

ξ Vorticidad.

∇^2 Operador Laplaciano.

u_τ Velocidad de fricción.

y^+ Distancia normal a la pared del perfil.

U^+ Velocidad tangencial a la superficie en la capa límite.

Análisis Numérico del Flujo Turbulento sobre el perfil NACA 1408

Resumen

La tecnología de simulación en la ingeniería es parte fundamental de la innovación que requiere la industria moderna. Debido a que la realidad virtual se convertirá en soluciones para las necesidades humanas, dichas simulaciones deben ser confiables y precisas. El presente documento refleja la fidelidad de un análisis numérico validando resultados de pruebas experimentales realizadas años atrás en túnel de viento sobre un perfil aerodinámico. En este proceso entender los principios físicos de la turbulencia y el modelamiento adecuado del tensor turbulento es absolutamente necesario debido a que existen diferentes caminos los cuales seguir y es aquí donde radica gran parte del éxito. El modelo escogido para la validación fue el SST k-w luego de entender su legado de ecuaciones promediadas y su fundamentación en la suposición de Boussinesq, sumado a términos como la ecuación de transporte para la energía cinética turbulenta, las funciones de mezcla y coeficientes de cierre. En todo este proceso de validación comprender como funciona el método numérico del volumen finito y el manejo de las ecuaciones algebraicas, es clave también para evitar el uso de la herramienta computacional como una caja negra que entrega resultados con errores o inexactitudes que merman la confianza en la calidad del análisis realizado.

Palabras claves: Modelos de turbulencia, CFD, volumen finito, RANS, ecuación de transporte, Suposición de Boussinesq.

Numerical Analysis of Turbulent Flow on NACA 1408 Profile.

Abstract

Simulation technology in engineering is a fundamental part of the innovation required by modern industry. Because virtual reality will become solutions for human needs, such simulations must be reliable and accurate. The present document reflects the fidelity of a numerical analysis validating results of experimental tests carried out years ago in a wind tunnel on an aerodynamic profile. In this process, understanding the physical principles of turbulence and proper modeling of the turbulent tensor is absolutely necessary because there are different paths to follow and this is where much of the success lies. The model chosen for the validation was the SST k-w after understanding its legacy of averaged equations and its foundation in the Boussinesq assumption, added to terms such as the transport equation for turbulent kinetic energy, the mixing functions and closing coefficients. Throughout this validation process, understanding how the numerical method of finite volume works and the management of algebraic equations, is also key to avoiding the use of the computational tool as a black box that delivers results with errors or inaccuracies that undermine confidence in the quality of the analysis performed

Key words: CFD, finite volume, RANS, turbulent stresses, transport equation, turbulence model, Boussinesq assumption.

Capítulo 1

Introducción

La industria aeronáutica en su evolución constante, se ha volcado cada día más hacia las simulaciones de ingeniería gracias al poder computacional que avanza a niveles superiores constantemente. Dichas simulaciones deben ser precisas, rápidas y confiables. Una de las ramas donde se puede apreciar dicha tecnología es en la mecánica de fluidos, donde mediante métodos numéricos se describe el comportamiento de un flujo ya sea interno o externo, sea laminar o turbulento.

El flujo sobre el perfil usado es de tipo turbulento, el más común en la naturaleza, apreciable en el movimiento de fluidos alrededor de aeronaves, carros o edificios y las correspondientes estelas que deja dicho proceso, se aprecia en la combustión de motores a reacción o combustión interna, en fluidos viajando por tuberías, incluso la sangre que circula por nuestras arterias es de tipo turbulento. El manejo de la turbulencia no es sencillo debido a sus peculiares propiedades, por lo tanto aquí se muestra como se trata estadísticamente el problema; debido al tratamiento estadístico que se realiza nace un término fundamental llamado el Esfuerzo Turbulento o Esfuerzo Reynolds, una de las formas de tratar dicho término es mediante modelos que no son más que un intento desesperado por manejar el problema del cierre, este proceso se llama Modelamiento de la Turbulencia, para validar las pruebas experimentales se tomó el camino de las RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) usando el modelo SST k-w que es lineal o de primer orden y se basa en la suposición de Boussinesq .

Cuando se habla de modelos estamos hablando de aproximaciones muy realistas de un fenómeno dado, sin embargo están sujetos a ventajas y desventajas pues se basan en suposiciones, por lo tanto se deben comparar en lo posible con pruebas experimentales para afianzar su confiabilidad. Por ende se tomó como base los coeficientes aerodinámicos generados en pruebas de túnel de viento realizadas por la NACA (Comité Asesor para la Aeron Nacional de los Estados Unidos) sobre el perfil NACA 1408 en un flujo turbulento subsónico con número Reynolds de $6 \cdot 10^6$, dichos resultados se encuentran en el texto *Theory of Wing Section* y se compararon con los resultados numéricos obtenidos mediante el uso del paquete CFD Ansys Fluent no sin antes haber comprendido conceptos claves en el modelo matemático del volumen finito como la derivación de las ecuaciones algebraicas en las celdas y sus errores por la discretización, como se linealizan las ecuaciones que no lo son como la del momentum y el correspondiente error de linealización, el proceso de iteración de dichas ecuaciones lineales para generar los datos finales del problema con su respectivo manejo de los residuales.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

La dinámica y cinemática de los fluidos se rigen por tres leyes básicas de conservación, conservación de la masa, de la energía y del momentum, este último en la forma de las ecuaciones de Navier-Stokes que son ecuaciones diferenciales no lineales las cuales hacen que un análisis analítico sea muy limitado. Las ecuaciones enunciadas anteriormente sirven también para describir flujos de tipo turbulento no sin antes hacerle arreglos debido a que es un fenómeno aleatorio, caótico e irregular, está constituido por un amplio espectro continuo de escalas de remolinos los cuales pueden ser del tamaño de la geometría del flujo hasta los más diminutos, tienen una enorme sensibilidad a las condiciones iniciales, son inestables en el tiempo y el espacio.

Las características de la turbulencia implican que las variables como la velocidad o presión tengan dos componentes, uno promedio y uno fluctuante en vez de un componente instantáneo, por ejemplo la presión instantánea $p = \bar{p} + p'$. La ecuación de la continuidad y la Navier-Stokes se deben acomodar a dicha realidad generando las famosas ecuaciones promediadas Reynolds o RANS, estas nuevas ecuaciones generan un nuevo término conocido como tensor de esfuerzo turbulento $R_{ij} = -\rho \overline{u_i' u_j'}$. Este término es un tensor que agrega 6 incógnitas más, lo cual genera que el sistema en general tenga más variables que ecuaciones para resolverlas, el famoso problema del cierre.

La forma más generalizada de cerrar el sistema es modelar el esfuerzo turbulento en base a suposiciones fundamentadas en realidades físicas, dicha labor que sigue vigente hasta la escritura de este documento y seguirá después debido a que es una temática en la cual no se ha dicho la última palabra y nuevas propuestas son requeridas para mejorar los modelos existentes, proponer modelos de uso general, y modelos menos exigentes en cuanto a poder de cómputo para tratar el fenómeno. Este proceso se conoce como modelamiento de la turbulencia y es fundamental en las simulaciones CFD.

2.1 Objetivos

2.1.1 Objetivo General

Validar numéricamente los coeficientes aerodinámicos experimentales del perfil NACA 1408.

2.1.2 Objetivos Específicos

- Describir la procedencia estadística del tensor de esfuerzos turbulentos como consecuencia de lo aleatorio y fluctuante del fenómeno.
- Relacionar la suposición de Boussinesq y la viscosidad turbulenta con la energía cinética turbulenta en los modelos de dos ecuaciones de transporte.
- Emplear el método numérico del volumen finito mediante el uso de un paquete CFD.

2.2 Justificación

La pertinencia del proyecto se debe a que relaciona dos temáticas fuertemente unidas en la obtención de resultados confiables en simulaciones que involucran la mecánica de fluidos, el modelado de un flujo turbulento y el uso correcto de la dinámica de fluidos computacional CFD. El uso correcto de una herramienta CFD se fundamenta en tres pilares, la generación de la malla, el funcionamiento de los algoritmos y el modelado de la turbulencia.

Teorías matemáticas muy precisas han evolucionado para los dos primeros elementos, la generación de la malla y el desarrollo de algoritmos, pero para la turbulencia la precisión no es la misma lo cual no sorprende pues el objetivo ha sido aproximarse a un fenómeno extremadamente complicado. Por lo tanto es vital comprender como funcionan los modelos en función de los principios físicos en los que se fundamentan, las ecuaciones de transporte adicionales que resuelven por ejemplo los de cero ecuaciones adicionales, los de una, los de dos, entender las variables nuevas que entran en juego como la energía cinética turbulenta, la disipación de la energía, la frecuencia turbulenta, las funciones de mezcla y como se relacionan estas nuevas variables con la viscosidad turbulenta.

También es muy importante conocer como la turbulencia se hace presente debido a una vorticidad fluctuante producto de los continuos estiramientos de la línea de vórtice y como se transfiere la energía en forma de cascada en todo este proceso hasta la disipación en las menores escalas. Comprender los aspectos enunciados es vital para una simulación computacional acertada y su posterior aplicación en la industria.

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1 Importancia de los datos experimentales en la consolidación de los modelos turbulentos.

Validar numéricamente datos experimentales de túneles de viento es una tarea necesaria para comprobar la confiabilidad del método y el modelo que se usan para dicha validación, de ésta manera el modelo usado se puede emplear en otro fenómeno parecido y generar resultados acertados, ésta técnica se puede apreciar en la investigación aerodinámica moderna de edificios, como el estudio llevado a cabo por Alminhana, Braun y Loredou-Souza (2017), *Investigación numérico-experimental sobre el rendimiento aerodinámico de los modelos de construcción CAARC con modificaciones geométricas*, Universidad Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Brasil. Donde probaron las fuerzas generadas por el viento en edificios, modificando las secciones transversales para comparar la influencia de los cambios en las fuerzas aerodinámicas, la prueba fue experimental en túnel de viento y numérica usando el modelo turbulento LES y el método de elementos finitos, alcanzando una alta convergencia entre los datos experimentales y los resultados numéricos.

Lograr la tan anhelada **confiabilidad** en los resultados computacionales no es sencillo debido a que existen varios métodos numéricos para resolver las ecuaciones que gobiernan el campo de flujo y existen decenas de modelos para modelar un flujo turbulento, de la correcta escogencia del modelo y método depende la calidad de los resultados, por ejemplo la investigación sobre perfiles para turbinas eólicas realizada por Wolfe (1997, p.34) concluyó que: “Hemos reafirmado dos áreas en CFD que requieren más investigación y desarrollo para permitir simulaciones numéricas precisas del flujo sobre la generación actual de perfiles aerodinámicos: predicción de la transición y el modelamiento de la turbulencia”.

Mucha de la investigación inicial experimental sobre perfiles aeronáuticos fue realizada por el antiguo comité asesor nacional para la aeronáutica NACA por sus siglas en inglés, quienes propusieron métodos analíticos para generar perfiles aeronáuticos definidos por Anderson (2001) como cualquier sección del ala cortada por un plano paralelo a la cuerda de la misma. Dichos perfiles se probaron en túneles de viento para crear una base de datos de los coeficientes de cada uno y así los ingenieros poder escoger entre ellos dependiendo de la necesidad de diseño. Entre los perfiles NACA más probados experimentalmente se encuentran los simétricos de cuatro dígitos en particular el 0012 y el 0018, como se evidencia en el reporte No. 647 de la NACA por Goett y Vullivant (1938) quienes realizaron pruebas a escala real de dichos perfiles de medidas 6 pies de cuerda y 36 pies de envergadura con el fin de proveer datos base de comparación con otras pruebas de los mismos perfiles a escala y los efectos de la turbulencia. Debido al amplio estudio experimental sobre dichos perfiles simétricos, existe una buena base de datos que se ha usado para probar los modelos turbulentos y métodos numéricos, por ejemplo la simulación numérica de flujo compresible alrededor del perfil 0012 hecha por Valenzuela (2009) el cual usó el método de elementos espectrales con una malla no estructurada o el trabajo

de Sogukpinar (2017), *Simulación numérica de perfiles inclinados de 4 dígitos Naca 00XX para encontrar el ángulo óptimo de un ala de avión*, Universidad de Adiyaman, Turquía. Quien usó el modelo turbulento SST en los perfiles 0008, 0009, 0012, 0015, 0018, 0021 y el 0024 probando la influencia del aumento de espesor en los coeficientes de sustentación, arrastre y presión.

3.2 Ecuaciones Gobernantes de los fluidos

3.2.1 Forma Integral

La forma integral de las leyes de conservación nace de aplicar el teorema de transporte Reynolds que es el enlace entre los conceptos sistema y volumen de control, relacionando la razón de cambio de las propiedades en ellos. La versión general que se aplica a la conservación de la masa, momentum y energía donde b es la propiedad intensiva (por unidad de masa) tiene la siguiente forma:

$$\frac{DB_{SIS}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v} b\rho\delta v + \int_{c.s} b\rho V \cdot \hat{n}\delta S \quad (3.1)$$

Conservación de la masa	$\frac{D}{Dt} \int_{sis} \rho\delta v = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v} \rho\delta v + \int_{c.s} \rho V \cdot \hat{n}\delta S = 0$
Conservación del Momentum Lineal	$\frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v} v\rho\delta v + \int_{c.s} v\rho V \cdot \hat{n}\delta S =$ $-\int_{c.s} p\hat{n}\delta S + \int_{c.s} \tau\delta S + \int_{c.v} g\rho\delta v + \sum F_{externas.}$
Conservación de la energía (forma de la primera ley de la termodinámica)	$\frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v} e\rho\delta v + \int_{c.s} e\rho V \cdot \hat{n}\delta S =$ $\int_{c.v} v g\rho\delta v - \int_{c.s} v p\hat{n}\delta S + \int_{c.s} v\tau\delta S + \sum (F_{externas.}$ $* V_{ext.}) - \int_{c.s} Q\hat{n}\delta S$

3.2.2 Forma Diferencial

El método del volumen de control fijo como herramienta de análisis es muy importante pues permite dar soluciones sin conocimiento detallado de los cambios de velocidad o presión dentro del volumen, más bien en las superficies del mismo, sin embargo en ocasiones es necesario rastrear en detalle el fluido, por ejemplo en aerodinámica nos interesa los cambios en los esfuerzos de presión y cortantes a lo largo de la superficie del ala y el volumen de control fijo se queda corto para dicho fin. Por lo tanto se requiere relaciones que se apliquen a un punto o un Elemento de Fluido definido como una región infinitesimalmente pequeña dentro del campo de flujo dado. Esta técnica de tomar un volumen de control infinitesimal o elemento de fluido y no un volumen de control fijo se llama Análisis Diferencial y se aplica al movimiento del elemento de fluido el cual experimenta translación, rotación, deformación linear o angular mientras fluye.

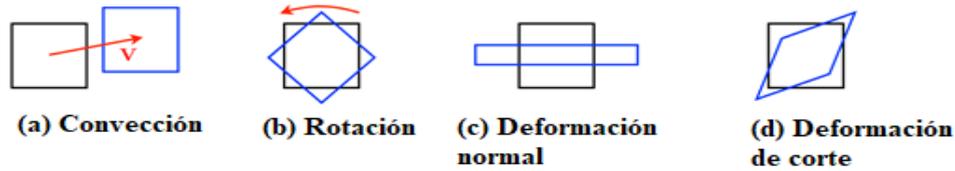


Figura 3.1: Tipos de movimiento y deformación que experimenta un elemento de fluido.

Conservación de la masa (forma vectorial).	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$
Conservación del Momentum Lineal (Navier-Stokes para flujo incompresible).	$\delta \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$
Tasa de dilatación volumétrica.	$\frac{1}{\delta v} \frac{d(\delta v)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V}$
Vorticidad.	$\xi = 2\omega = \nabla \times \vec{V}$
Tasa de deformación media (Forma de índices).	$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

3.3 Conceptos fundamentales que evitan el uso de Ansys Fluent como una caja negra y misteriosa.

Una herramienta de simulación es en principio una caja negra donde ingresamos datos como la geometría, la malla, condiciones de contorno y propiedades de los materiales, luego del proceso los resultados se entregan en forma de cifras e imágenes en color que pueden estar llenos de inconsistencias camufladas en imágenes bonitas o resultados poco dicentes.

El primer paso para evitar el mal uso de Ansys Fluent es identificar el modelo matemático, es decir señalar las ecuaciones gobernantes del fenómeno, a continuación se configuran las condiciones de contorno como la velocidad en la entrada, la condición de no deslizamiento en las superficies, la presión a la salida y condiciones de turbulencia iniciales.



Figura 3.2: Ansys Fluent como caja negra.

Ya con las ecuaciones y las condiciones de contorno queda completo el modelo matemático que usará Ansys Fluent para dar solución al problema mediante el método numérico del volumen finito.

Solución numérica mediante el método del volumen finito

Este método de discretización consiste en tomar el dominio del flujo y dividirlo en porciones o trozos llamados **celdas** y aplicar las leyes de conservación en su forma integral a cada una de las celdas, obteniendo así el conjunto de ecuaciones algebraicas que reducen el problema a hallar la velocidad y presión en el centro de las celdas.

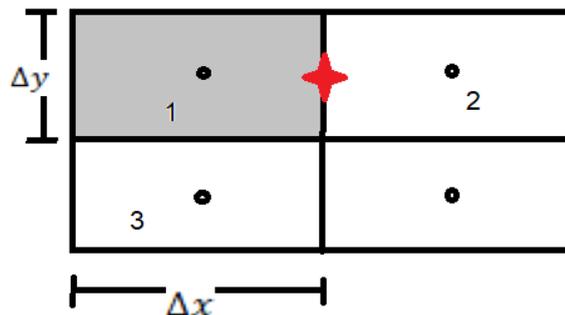


Figura 3.3. Relación entre celdas adyacentes para desarrollar las ecuaciones algebraicas.

- **¿Cómo se deriva el sistema de ecuaciones algebraicas?**

Para hallar las ecuaciones algebraicas se debe aplicar la forma integral de la conservación en cada una de las celdas relacionando los valores de centro de celda con sus vecinos (interpolación), al aplicar la conservación de la masa o flujo de masa en las 4 caras de la celda 1 mostrada en la Fig. 3.3 (La distancia perpendicular a la hoja, eje z es 1) obtenemos el caudal total en la celda como:

$$\left(\frac{\Delta y}{2}\right) u_1 + \left(\frac{\Delta y}{2}\right) u_2 - \left(\frac{\Delta x}{2}\right) v_1 - \left(\frac{\Delta x}{2}\right) v_3 - \Delta y = 0 \quad (3.2)$$

- **Las ecuaciones algebraicas provenientes de la conservación del momentum no son lineales, ¿Cómo se resuelven?**

El flujo neto de momentum por las superficies de control $\int_{c,s} \rho V (V \cdot \hat{n}) \delta S$ implica el producto de dos velocidades desconocidas lo cual se traduce en no linealidad de la ecuación. Por ejemplo la tasa de flujo de momentum en x en la cara derecha de la celda 1 mostrada en la Fig. 3.3 entrega la siguiente versión:

$$\text{móm en } x_{1-2} = \rho u_{1-2} u_{1-2} \Delta y (1)$$

$$\text{móm en } x_{1-2} = \rho \frac{(u_1 + u_2)^2}{4} \Delta y (1) \quad (3.3)$$

- **Linealización de las Ecuaciones Algebraicas.**

En este punto necesitamos el conjunto de ecuaciones lineales provenientes de las no lineales vistas anteriormente, la Ec. 3.3 muestra velocidades al cuadrado y el proceso consiste en aplicar el método Newton-Rapson de la siguiente forma:

Lo primero es dividir la velocidad en dos componentes:

$$u = u_s + \Delta u$$

Donde u_s es el valor supuesto y Δu es la corrección por la suposición. Ahora una función de u se desarrolla mediante una expansión en serie de Taylor con lo anterior en mente.

$$f(u) = f(u_s + \Delta u)$$

$$f(u) = f(u_s) + f'(u_s)\Delta u + f''(u_s)\frac{\Delta u^2}{2} + h.o.t \quad (3.4)$$

Ahora si la función $f(u)$ es u^2 entonces:

$$f(u) = u^2 \quad \Rightarrow \quad f(u_s) = u_s^2$$

$$f'(u) = 2u \quad \Rightarrow \quad f'(u_s) = 2u_s$$

Reemplazando los términos anteriores en la serie de Taylor (Ec. 3.4) obtenemos la velocidad al cuadrado que se necesitaba:

$$u^2 = u_s^2 + 2u_s\Delta u + \text{error de linearización}$$

El error de linearización proviene de los términos $f''(u_s)\frac{\Delta u^2}{2} + h.o.t$. Dicho error disminuye en la medida que el valor supuesto se aproxime al valor real es decir que la corrección (Δu) tiende a cero.

- **Orden de Exactitud del error en el esquema de Discretización.**

Discretizar el problema mediante el uso del volumen finito implicó la aparición de 2 errores en la Ec. 3.2, uno producto de suponer que la velocidad en el centro de la cara es igual a la velocidad en toda la cara y el otro es producto de suponer la velocidad sobre dicha cara como el promedio entre la velocidad en el centro de la celda interpolada con la velocidad en el centro de la celda vecina, estos errores se conocen como **errores de discretización**.

Para cuantificar dichos errores, se relaciona los valores en los centros de las celdas con los valores en las caras mediante una expansión de la serie de Taylor sobre la velocidad en la cara. Tomando la celda 1 y 2 obtuvimos la relación de velocidad a continuación:

$$u_{1-2} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \text{error}$$

Ahora se procede a determinar las velocidades u_1 y u_2 con base en lo dicho anteriormente:

$$u_1 = u_{1-2} + \left(\frac{\partial u_{1-2}}{\partial x}\right)\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_{1-2}}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\Delta x^2}{4}\right) + \dots$$

$$u_2 = u_{1-2} + \left(\frac{\partial u_{1-2}}{\partial x}\right)\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_{1-2}}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\Delta x^2}{4}\right) + \dots$$

El siguiente paso es sumar las ecuaciones anteriores y reorganizar los términos para determinar el error en el valor de la velocidad sobre dicha cara.

$$u_{1-2} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \text{error}_2$$

$$u_{1-2} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \left(\frac{\partial^2 u_{1-2}}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\Delta x^2}{4}\right) + \dots \quad (3.5)$$

La ecuación 3.5 cuantifica el error el cual es proporcional a Δx^2 , lo que se conoce como una **aproximación de exactitud de segundo orden**.

- **Solución Iterativa de las Ecuaciones Linealizadas y Manejo de Residuales**

El software soluciona las ecuaciones lineales mediante iteraciones, es decir el valor supuesto se actualiza de vez en vez hasta que los desequilibrios en las ecuaciones llegan a un valor de tolerancia determinado, el desequilibrio nunca será cero pues no tenemos las soluciones exactas, se tienen aproximaciones.

La ecuación algebraica 3.2 correspondiente a la conservación de la masa aplicada a la celda 1 muestra que el lado izquierdo debe ser cero, sin embargo con cada iteración el resultado (R_i) es un valor diferente a cero.

$$\left(\frac{\Delta y}{2}\right)u_1 + \left(\frac{\Delta y}{2}\right)u_2 - \left(\frac{\Delta x}{2}\right)v_1 - \left(\frac{\Delta x}{2}\right)v_3 - \Delta y = R_i$$

Sumar los desequilibrios en todas las celdas del dominio, genera el conocido **Desequilibrio Agregado o Residual (R)**.

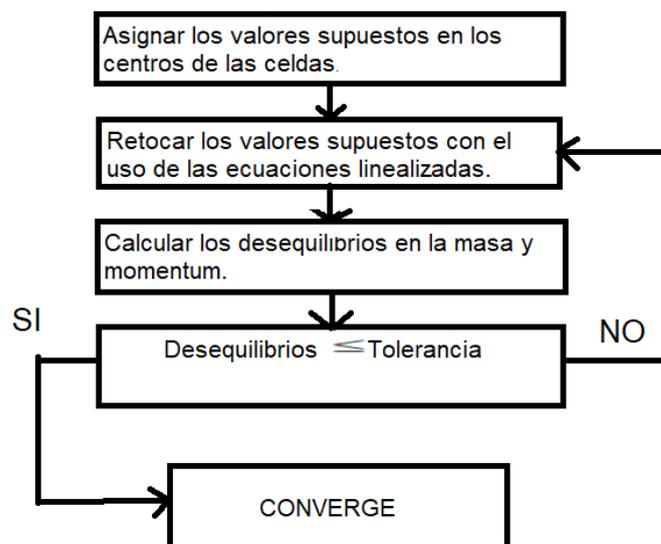
$$R = \frac{\sum |R_i|}{\text{Factor de Escala}}$$

El Factor de Escala es importante pues un desequilibrio de masa pequeño en un flujo supersónico puede ser grande para un flujo subsónico.

Finalmente tendremos solución al problema cuando el desequilibrio agregado sea menor o igual a una tolerancia que en el caso del Fluent es por defecto de 10^{-3} , con la opción de modificarlo para reducirlo más, también existirá un residual de momentum.

$$R = \frac{\sum |R_i|}{\text{Factor de Escala}} \leq \text{Tolerancia} \quad (3.6)$$

El algoritmo para las soluciones iterativas es el siguiente:



3.4 Flujo Turbulento y su descripción estadística

Un flujo turbulento está constituido por movimientos de remolino con un amplio espectro de escalas las cuales pueden ser del tamaño de la geometría del flujo hasta los más pequeños cuyo número Reynolds es aproximadamente 1, es aleatorio caótico e irregular, siempre es tridimensional e inestable, sin embargo cuando se promedian respecto al tiempo, se puede tratar como un flujo de 2 dimensiones, es disipativo, lo que significa que la energía cinética en los remolinos más pequeños, se transforman en energía térmica. Este proceso de transferencia de energía desde los mayores remolinos al más pequeño se llama el proceso en cascada e indica Davidson (2018, p.69) que “Cuanta más energía se transforme de energía cinética a energía térmica, mayores serán los gradientes de velocidad”.

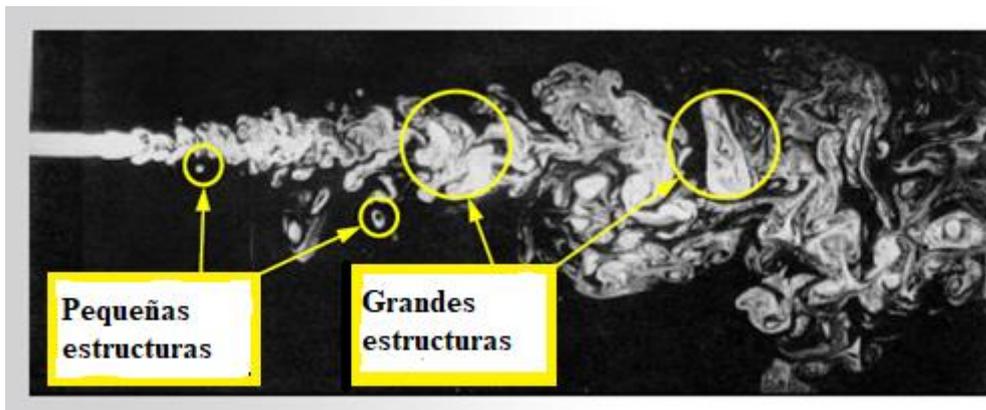


Figura 3.4: Escalas de longitud de la turbulencia y transferencia de energía.

Reglas del promedio para la turbulencia

1. El promedio del promedio es un promedio en sí mismo:

$$\overline{\bar{u}} = \bar{u}$$

2. El promedio de las fluctuaciones es cero:

$$\overline{u'} = 0$$

3. El promedio del producto de dos fluctuaciones es diferente a cero.

$$\overline{u'v'} \neq 0$$

4. El promedio del producto entre una cantidad promediada y una fluctuante es cero.

$$\overline{\bar{u}v'} = 0$$

5. El promedio del producto entre una cantidad promediada y una instantánea será igual al producto de las cantidades promediadas.

$$\overline{\bar{u}v} = \bar{u} \bar{v}$$

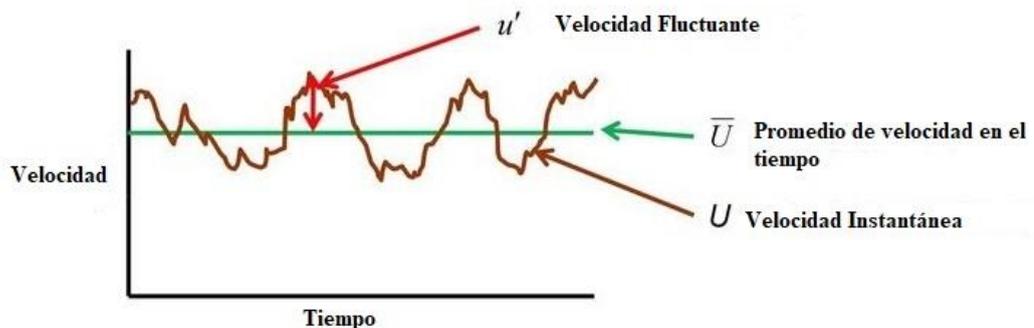
6. El promedio de una derivada espacial es igual a la derivada espacial del promedio de la función.

3.4.1 Ecuaciones Navier-Stokes promediadas (RANS) y aparición del esfuerzo turbulento o Reynolds.

Debido a lo aleatorio de un flujo turbulento la forma adecuada de tratarlo es estadísticamente, empezando por reconocer que la velocidad instantánea (Fig. 3.5) tiene 2 componentes, uno promedio y uno fluctuante $u = \bar{u} + u'$; La velocidad promedio respecto al tiempo en una posición dada se define como:

$$\bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt$$

La expresión $T \rightarrow \infty$ significa que éste tiempo es mucho mayor al de las fluctuaciones que es muy corto. La velocidad promedio es independiente del tiempo como se aprecia en la Fig. 3.5, a este caso se le denomina “**Turbulencia Estacionaria**”. Siempre que se habla de promedios, el término desviación está presente, la desviación de la media es el componente fluctuante de la velocidad u'



- En cualquier punto en el tiempo : $U = \bar{U} + u'$

Figura 3.5: Componentes de velocidad.

El siguiente paso es definir la desviación estándar de la velocidad media como la raíz del promedio del cuadrado del componente fluctuante:

$$\sqrt{\overline{(u - \bar{u})^2}} = \sqrt{\overline{(u')^2}}$$

Reynolds Promedio

La primera ecuación que se debe promediar es la de la continuidad así:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \text{ donde } u_i = \bar{u}_i + u_i'$$

Reemplazando los componentes de la velocidad en la ecuación de la continuidad anterior y con la ayuda de las reglas del promedio obtenemos la versión promediada de la misma:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.7)$$

Ahora se procede a promediar la ecuación de Navier-Stokes o conservación del momentum que en forma de índices es:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.8)$$

Luego de reemplazar la velocidad instantánea $u_i = \bar{u}_i + u_i'$ en la Ec. 3.8, realizar el álgebra necesaria con el uso de las reglas del promedio, se obtiene la versión promediada en el tiempo de la ecuación de Navier-Stokes más conocida como **RANS** por sus siglas Reynolds Averaged Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u_i' u_j'}) \quad (3.9)$$

Tensor de Esfuerzo Turbulento o Esfuerzo Reynolds

Al comparar las ecuaciones 3.8 y 3.9 se aprecia la aparición de un nuevo término $-\rho \overline{u_i' u_j'}$, el esfuerzo turbulento parecido al tensor de esfuerzo viscoso se representa mediante la siguiente matriz con los componentes fluctuantes de velocidad:

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = -\rho \begin{array}{ccc} \overline{u_1' u_1'} & \overline{u_1' u_2'} & \overline{u_1' u_3'} \\ \overline{u_2' u_1'} & \overline{u_2' u_2'} & \overline{u_2' u_3'} \\ \overline{u_3' u_1'} & \overline{u_3' u_2'} & \overline{u_3' u_3'} \end{array}$$

Debido a la aparición de este nuevo esfuerzo turbulento, el número de variables es superior al número de ecuaciones, además las nuevas variables por ejemplo $\overline{u_2' u_3'}$ resultado de promediar el producto de 2 variables desconocidas se conocen como **correlaciones**, un desafío enorme debido a la no linealidad de la ecuación de Navier-Stokes y como dice Wilcox (2006, p.43), “A medida que tomamos momentos cada vez más altos, generamos incógnitas adicionales en cada nivel y en ningún momento este procedimiento equilibrará nuestro libro de incógnitas / ecuaciones”.

3.4.2 Vorticidad de los remolinos (eddy) en un flujo turbulento.

Los eddies o remolinos son estructuras rotacionales que extraen la energía cinética del flujo medio y la disipan de forma anisotrópica, es decir varía con la dirección por lo tanto se debe hallar la vorticidad del fenómeno aplicando el producto cruz al vector de velocidad en las ecuaciones de Navier-Stokes así:

$$\delta \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \delta \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \nabla \times (-\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v})$$

Luego del álgebra necesaria y uso de identidades llegamos a la expresión que **relaciona la razón de cambio de la vorticidad (en forma de derivada material) con el estiramiento de vórtice y la disipación viscosa.**

$$\delta \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\xi} \right) = (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{v} + \mu \nabla^2 \vec{\xi}$$

Reescribiendo obtenemos la versión final de la expresión solicitada:

$$\frac{D(\vec{\xi})}{Dt} = \frac{1}{\delta} (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{\xi} \quad (3.12)$$

La Ec. 3.12 es muy importante pues un flujo turbulento está conformado por vórtices que cambian debido al estiramiento producto de la energía cinética turbulenta del flujo medio y la disipación viscosa de la energía.

4.1 Elección del modelo turbulento y su relación con la capa límite.

La correcta elección del modelo turbulento es fundamental para una simulación CFD debido a que existen varios caminos para tomar, es necesario conocer las diferencias entre ellos como los principios físicos en los que se fundamentan, las ecuaciones de transporte que usan, el requerimiento computacional, las limitaciones para recrear flujos complejos y la dificultad de simular el comportamiento de una zona tan importante como la capa límite, de vital importancia en la aeronáutica por su desprendimiento y la relación con la entrada en pérdida de un ala por ejemplo.

4.1.1 Componentes de la capa límite y variación de velocidad en dicha zona

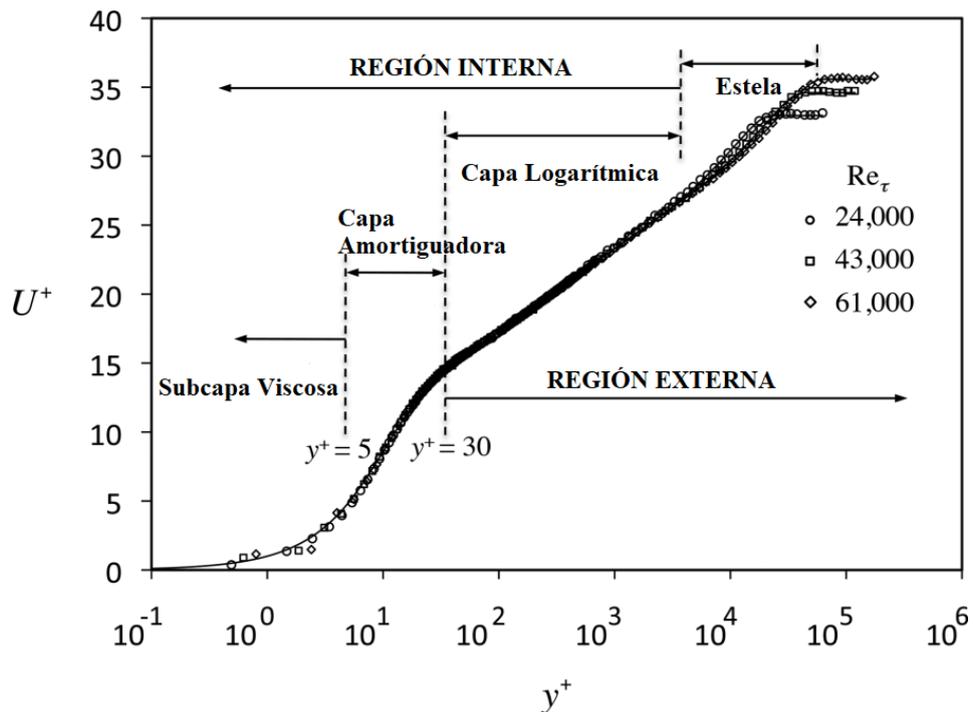


Figura 4.1: Partes de la capa límite.

La gráfica anterior U^+ vs y^+ muestra la relación entre la distancia normal a la pared y^+ enfrentado con la velocidad tangencial U^+ , en forma de variables sin dimensiones (también conocidas como unidades de pared). La razón para graficar de esta manera es que **el comportamiento normal a la pared es universal y válido para una gran cantidad de flujos con un amplio rango de geometrías y velocidades.**

La velocidad de referencia para generar U^+ , es la llamada velocidad de fricción (u_τ) basada en el esfuerzo cortante en la pared τ_w .

$$\tau_w \sim \rho u_\tau^2$$

Dicha velocidad de fricción se usa pues la velocidad en la pared es cero y necesitamos una referencia de velocidad que no sea la de la corriente libre pues no sería efectiva, al despejarla obtenemos la relación:

$$u_\tau \sim \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Algunos códigos CFD usa la raíz cuadrada de la energía turbulenta como velocidad de referencia pero la de fricción es la más usada.

Ya con la velocidad de referencia (o escala de velocidad) se requiere una longitud de referencia (escala de longitud) la cual se da en términos de la viscosidad cinemática término muy importante en el proceso de disipación de la energía así:

$$y_\tau \sim \frac{\nu}{u_\tau}$$

Por lo tanto las formas no dimensionales de velocidad y longitud serán:

$$U^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad y^+ = \frac{y}{y_\tau} \quad \rightarrow \quad y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}$$

En términos comunes y^+ sirve como una lupa para hacer zoom sobre la capa límite que es una región pequeña donde suceden varias cosas y se requiere una mayor resolución allí, también actúa como indicador del número Reynolds local.

Una capa límite se compone de dos zonas principales, una interna y la parte externa, la interna se compone de 3 capas:

- **Subcapa Viscosa (Viscous Sublayer):** Es la región más próxima a la pared, el comportamiento del flujo se asemeja a laminar donde la viscosidad molecular determina el comportamiento, los esfuerzos cortantes turbulentos son despreciables aquí. El perfil de velocidad promedio (en forma no dimensional) de ésta región es lineal generando la relación:

$$u^+ = y^+ \quad \text{Para} \quad y^+ < 5 \quad (4.1)$$

- **Capa Amortiguadora (Buffer Layer):** En esta capa se presenta la transición entre el comportamiento dominado por la pared al comportamiento dominado por las fluctuaciones de velocidad ($y^+ = 11.25$). Es decir los efectos del esfuerzo cortante en la pared τ_w se propagan a una capa donde el esfuerzo cortante está dominado por la turbulencia.

$$\tau_w \approx -\rho \overline{u'v'}$$

Después del análisis correspondiente, obtenemos el perfil de velocidad en dicha zona como:

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & y^+ < 11.25 \\ u^+ = \frac{1}{K} \ln(y^+) + A & y^+ > 11.25 \end{cases}$$

La constante A para una pared suave y luego de repetitivos experimentos tiene un valor aproximado de 5. La constante $K \approx 0.4187$ es universal, se denomina constante de Von Karman en honor al grupo que luego de mucha experimentación dio con dicho valor. Se recomienda no poner la primera celda en esta zona pues el nivel de incertidumbre es grande y el comportamiento difuso.

- **Capa Logarítmica (Logarithmic Layer):** Esta capa es común para la zona interna y externa pues es la parte más expuesta a la corriente libre del flujo, la relación entre velocidad y distancia a la pared es de tipo logarítmico.

$$u^+ = \frac{1}{K} \ln(y^+) + A \quad \text{Para} \quad 30 < y^+ < 200 \quad (4.2)$$

4.1.2 Modelos Turbulentos

La función de un modelo de turbulencia es diseñar aproximaciones para las correlaciones desconocidas en términos de propiedades de flujo que se conozcan de modo que exista un número suficiente de ecuaciones, al hacer tales aproximaciones cerramos el sistema. Recordemos que el esfuerzo turbulento $-(\rho \overline{u_i' u_j'})$ nacido luego de promediar las Navier-Stokes adiciona 6 incógnitas más al sistema sin el mismo número de ecuaciones para resolverlo.

El camino elegido para la elección del modelo fue el de las RANS pues son los modelos más usados en la industria gracias al amplio rango de flujos que pueden representar sin el uso excesivo de memoria y potencia de computo; en esta categoría se escogió el camino de los modelos lineales o de primer orden fundamentados en la suposición de Boussinesq en la cual el esfuerzo turbulento τ_{ij} se relaciona linealmente con la tasa de deformación media S_{ij} mediante la viscosidad turbulenta ν_t que no es una propiedad del fluido pero si del flujo y como dice Woelke (2014, p.94) “la viscosidad turbulenta se ve afectada por la forma y la naturaleza de cualquier pared sólida, la intensidad de la turbulencia de flujo libre y los efectos del historial de flujo”, involucrando la energía cinética turbulenta, para generar la relación enunciada a continuación :

$$\tau_{ij} = 2\nu_t(S_{ij}) - \frac{2}{3}k\delta_{ij} \quad (4.3)$$

El primer miembro del lado derecho de la Ec. 4.3 es el componente anisotrópico del esfuerzo y el segundo es el componente isotrópico. Los modelos lineales se subdividen a su vez en los modelos N-ecuaciones donde N es el número de ecuaciones de transporte adicionales a la de conservación de masa y momentum que usan para resolver el sistema. Finalmente para simular el flujo sobre un perfil aerodinámico se escogió el modelo de 2 ecuaciones SST $k - \omega$ por las razones que se explican más adelante.

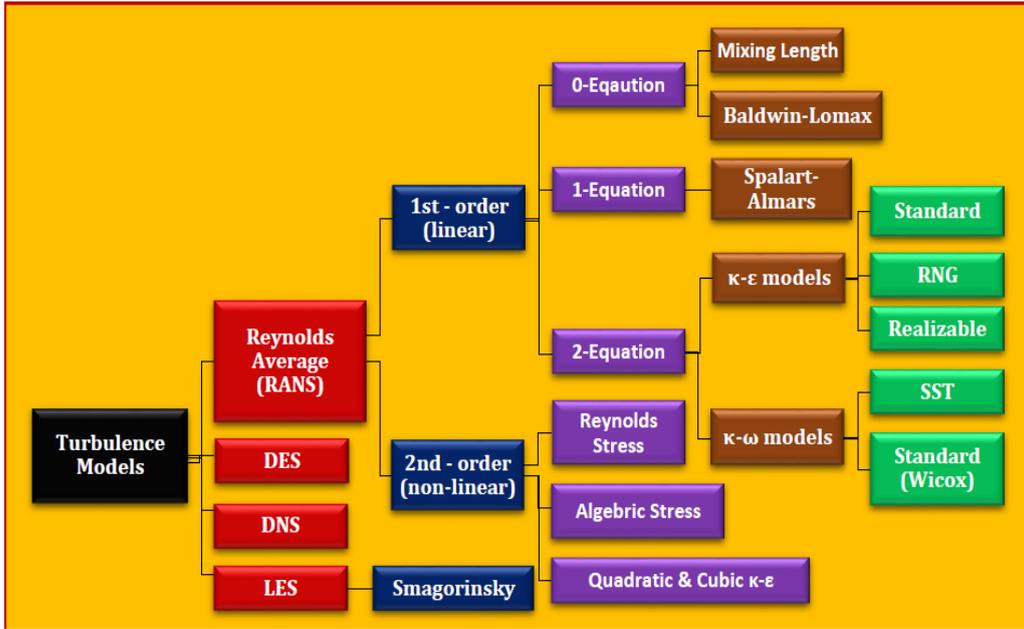


Figura 4.2: Clasificación de los modelos turbulentos. Por Sadrehaghghi.

4.2 Modelos basados en la viscosidad eddy y su relación con la ecuación de la energía cinética turbulenta.

Ecuación de la energía cinética turbulenta (k).

La ecuación de la energía cinética turbulenta permite incorporar los efectos no locales y el historial del flujo en la viscosidad turbulenta, al igual que la velocidad y presión, la energía cinética instantánea tienen dos componentes uno promedio y uno fluctuante $K(t) = \bar{k} + k$,

$$\bar{k} = \frac{1}{2}(\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2})$$

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2})$$

Por lo tanto es necesaria una ecuación para k debido a que es la base para hallar la viscosidad cinemática turbulenta y el procedimiento es el siguiente:

1. Partimos de la ecuación de Navier-Stokes antes del promedio es decir con la velocidad y presión instantánea.

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (4.8)$$

Ahora la versión promediada RANS de la ecuación anterior es:

$$\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{u_i' u_j'}) \quad (4.9)$$

2. Vamos por la energía cinética turbulenta por lo tanto se necesita el componente fluctuante de velocidad y presión que se halla restando la ecuación 4.9 de la 4.8 cuyo resultado es:

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i u_j' + \bar{u}_j u_i' + u_i' u_j' - \overline{u_i' u_j'}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) \quad (4.10)$$

3. El siguiente paso es multiplicar la ecuación anterior por u_i' pues la energía cinética tiene componentes de velocidad al cuadrado, este proceso genera 7 partes que se factorizan, usando la regla del producto para la derivación y la conservación de la masa para obtener:

- Parte 1: $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} (u_i')^2 \right)$
- Parte 2: $u_i' u_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$
- Parte 3: $\bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} (u_i')^2 \right)$
- Parte 4: $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j' \frac{1}{2} (u_i')^2 \right)$
- Parte 5: $u_i' \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{u_i' u_j'})$
- Parte 6: $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} u_i' p' \right)$
- Parte 7: $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) - \nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}$

4. El siguiente paso luego de haber multiplicado por u_i' la ecuación 4.10 es promediar las 7 partes anteriormente mencionadas y reorganizarlas dando como resultado:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{(u_i')^2} \right) + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{(u_i')^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{1}{2} \overline{u_i' u_i' u_j'} - \frac{1}{\rho} \overline{u_i' p'} + \overline{\nu u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \right) - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (4.11)$$

5. Ya con los cuadrados de la velocidad fluctuante se reescribe la ecuación 4.11 en términos de la energía cinética turbulenta k .

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i' u_i' u_j'} + \frac{1}{\rho} \overline{u_j' p'} - \overline{\nu u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \right) - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i' u_i' u_j'} \right)}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{u_j' p'}}_{\text{II}} - \underbrace{\overline{\nu u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}}_{\text{III}} - \underbrace{\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{IV}} - \underbrace{\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{V}} + \underbrace{\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{VI}} - \underbrace{\epsilon}_{\text{VII}} \quad (4.13)$$

- Parte I: Razón de cambio de la energía cinética turbulenta k .
- Parte II: Transporte de k por convección.
- Parte III: Difusión molecular donde k se difunde debido al proceso de transporte molecular natural del flujo.
- Parte IV: Transporte turbulento, representa la tasa a la cual la energía de la turbulencia es transportada a través del flujo debido a las fluctuaciones turbulentas.
- Parte V: Difusión k debido a la presión, es otra forma de transporte turbulento

formado por la correlación de las fluctuaciones de velocidad y presión.

- Parte VI: Productor o generador de la turbulencia, representa la velocidad a la cual la energía cinética se transfiere del flujo medio a la turbulencia. Físicamente representa la velocidad a la cual la tasa de deformación media realiza trabajo frente a los esfuerzos turbulentos.
 - Parte VII: Tasa de disipación de la energía cinética turbulenta, representa la velocidad con la cual k se transforma en energía térmica interna, es la velocidad media a la cual la parte fluctuante de la tasa de deformación realiza trabajo frente a los esfuerzos viscosos turbulentos.
6. Los términos I y II correspondientes a la derivada sustancial de k así como la difusión molecular III de la Ec. 4.13 son términos exactos mientras que la producción, difusión por presión, disipación y transporte turbulento involucra correlaciones indeterminadas, el último paso es cambiar dichas 4 correlaciones por aproximaciones de cierre así:
- Transporte turbulento y difusión por presión (IV y V): la aproximación estándar para representar el transporte turbulento de cantidades escalares es la difusión por gradiente, $-\overline{u_j' \phi} \sim \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$. Para la presión no existe dicha metodología por lo que se agrupa con el término de transporte y se asume la suma de ambos como el componente de difusión por gradiente. $\frac{1}{2} \overline{u_i' u_i' u_j'} + \frac{1}{\rho} \overline{u_j' p'} = -\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$ donde σ_k es un coeficiente de cierre.
 - La longitud característica l y la disipación ϵ son variables que faltan todavía, asumiendo que ambas son propiedades exclusivas de la turbulencia independientes de las propiedades naturales del fluido como la viscosidad molecular, por argumentos dimensionales [Taylor (1934)] propuso la disipación como:

$$\epsilon \sim \frac{k^{3/2}}{l} \quad l \sim \frac{k^{3/2}}{\epsilon}$$

Finalmente luego de tratar los términos con las correlaciones, tenemos la versión definitiva para la energía cinética turbulenta k

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mathbf{v} + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (4.14)$$

Modelo $k - \epsilon$ Estandar

Uno de los modelos más populares que ha servido de referencia para otros modelos es el $k - \epsilon$ donde una segunda ecuación de transporte se modela para la disipación. A pesar de las ventajas que otorga, tiene falencias y como dice en su memorándum Menter (1992) “Desde el punto de vista de la aerodinámica la mayor falencia del modelo es la falta de sensibilidad a los gradientes de presión adversos y la separación”; el modelo sobreestima la escala de la longitud turbulenta en la región cercana a la pared lo que se traduce en mayores niveles de esfuerzos cortantes que evitan o previenen la separación de la capa límite. Por otro lado el modelo no permite que (ϵ) sea cero en la superficie con condición de no deslizamiento. Otro de los inconvenientes es que se usa funciones de amortiguamiento en la sublayer que cambian de forma y no son lineales por lo

que linealizarlas es difícil y se traduce en dificultad de convergencia.

- **La ecuación para la viscosidad-eddy cinemática es:**

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4.15)$$

- **La ecuación de la energía cinética turbulenta k es la misma enunciada en la Ec. 4.14**
- **Ecuación para la tasa de disipación ϵ :**

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon}) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) \quad (4.16)$$

- **Constates del modelo**

C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Modelo SST $k-\omega$

Uno de los aspectos más importantes de los modelos es la predicción de la separación de la capa límite, por ejemplo la entrada en pérdida del ala está definida en dicha propiedad, el modelo SST $k-\omega$ fue diseñado por Menter (1993) para dar predicciones altamente exactas de la aparición y la cantidad de separación de flujo bajo gradientes de presión adversos mediante la inclusión de efectos de transporte en la formulación de la viscosidad-eddy. Es un modelo híbrido el cual usa el estándar $k-\epsilon$ para calcular las propiedades del flujo en la región de la corriente libre donde los $k-\omega$ son muy sensibles a las condiciones iniciales, cerca de la pared se usa un $k-\omega$ modificado en base a la frecuencia de turbulencia ω como segunda variable.

- **Viscosidad Cinemática Eddy**

$$v_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)} \quad \text{O} \quad v_t = \frac{k}{\omega} \quad (4.20)$$

- **Ecuación de transporte para la Energía Cinética Turbulenta:**

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + \sigma_k v_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (4.21)$$

- **Ecuación de transporte para la Frecuencia Turbulenta:**

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + \sigma_\omega v_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega,2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (4.22)$$

- **Relaciones Auxiliares.**

$$\circ F_1 = \tanh \left\{ \left\{ \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} d^2} \right] \right\}^4 \right\} \quad (4.23)$$

$$\circ F_2 = \tanh \left[\left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right] \quad (4.24)$$

$$\circ \phi = \phi_1 F_1 + \phi_2 (1 - F_1) \quad (4.25)$$

- **Coefficientes del modelo**

α		σ_k		σ_ω		β		β^*
α_1	α_2	σ_{k1}	σ_{k2}	$\sigma_{\omega 1}$	$\sigma_{\omega 2}$	β_1	β_2	9/100
5/9	0.44	0.85	1	0.5	0.856	3/40	0.0828	

4.3 Explicación del Modelo SST $k-\omega$

La ecuación de transporte Ec. 4.22 tiene los 4 elementos característicos que son: el de producción, el de disipación, y el de difusión que a su vez tiene 2 partes, una dependiente de la viscosidad molecular y otra de la viscosidad turbulenta; El cuarto término del lado derecho de la Ec. 4.22 tiene un miembro llamado aproximación de mezcla, $(1 - F_1)$ el cual es la clave para intercambiar entre los modelos $k-\epsilon$ y el $k-\omega$.

$$2(1 - F_1) \sigma_{\omega, 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

- Cuando $F_1 = 1$, el término desaparece, por lo tanto queda un modelo $k-\omega$ que es muy bueno resolviendo en la región más cercana a la pared.
- Cuando $F_1 = 0$, el término permanece, indicando su relación con los modelos $k-\epsilon$.

Es decir, cada celda del dominio tendrá un valor F_1 dependiendo su ubicación como se ve a continuación:



Figura 4.3: Función de mezcla en las celdas del dominio.

La función de mezcla F_1 usa la tangente hiperbólica con el fin que la transición entre los modelos sea suave como se aprecia en la gráfica a continuación.

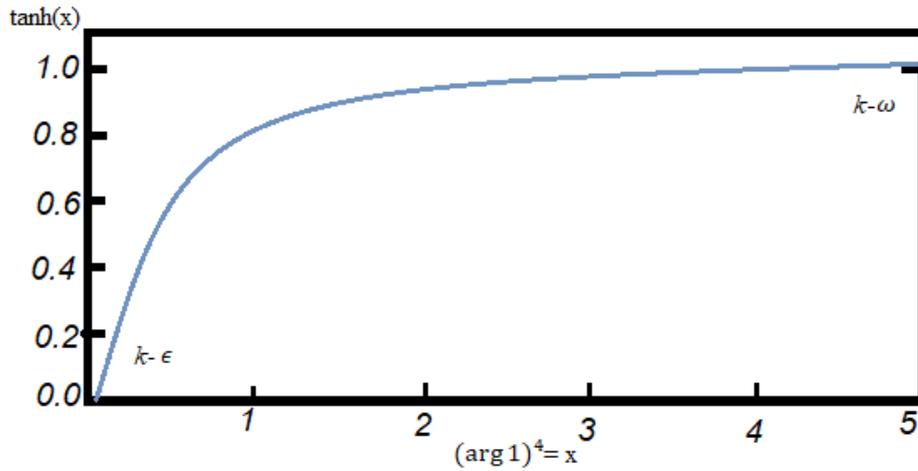


Figura 4.4: Transición entre modelos mediante la tangente hiperbólica

El argumento $(\arg 1)$ elevado a la cuarta de la función de mezcla F_1 , Ec. 4.23 es dependiente de la distancia a la pared más cercana d .

$$\min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega} \right), \frac{4\sigma \omega_2 k}{C_D k \omega d^2} \right]$$

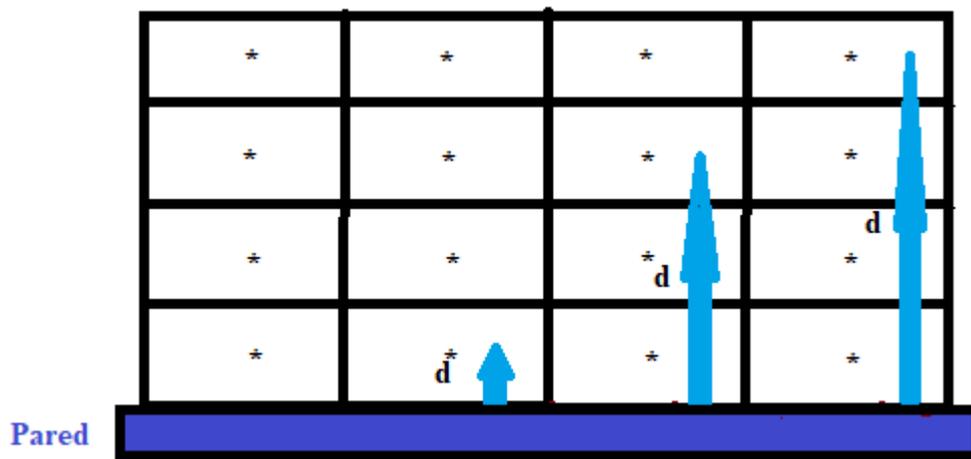


Figura 4.5: Distancia desde la pared al centro de la celda

La función F_1 , Ec. 4.23 además de mezclar las ecuaciones, combina también las constantes empíricas del modelo mediante una interpolación lineal como se aprecia en la ecuación 4.25:

$$\phi = \phi_\omega F_1 + \phi_\epsilon (1 - F_1)$$

Donde ϕ_ω es la constante en el modelo $k-\omega$ es decir β^* y ϕ_ϵ es la constante del modelo $k-\epsilon$, es decir C_μ . Cualquier constante puede mezclarse mediante dicha relación.

Aun con la función de mezcla F_1 la experimentación mostró que se sigue sobre prediciendo el esfuerzo cortante en la pared lo cual influye negativamente en la separación de la capa límite

sobre el perfil. Las siglas SST indican que el esfuerzo cortante principal se tiene en cuenta durante todo el recorrido del flujo mediante un limitador de viscosidad el cual mejora la concordancia con los resultados experimentales para flujos con separación, esto se aprecia en la Ec. 4.20.

$$\underbrace{\nu_t = \frac{k}{\omega}}_{\text{Original}} \quad \underbrace{\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, SF_2)}}_{\text{Modelo SST}} \quad (4.26)$$

La función de mezcla correspondiente F_2 es similar en forma a la F_1 , el denominador de la Ec. 4.26 tiene el producto SF_2 , que es el limitante y actúa reduciendo la viscosidad turbulenta en la zona cercana a la pared donde la magnitud del esfuerzo cortante (S) es grande. El procedimiento anterior mejora la separación del flujo de la pared, lo cual es fundamental en el desempeño de un ala o perfil.

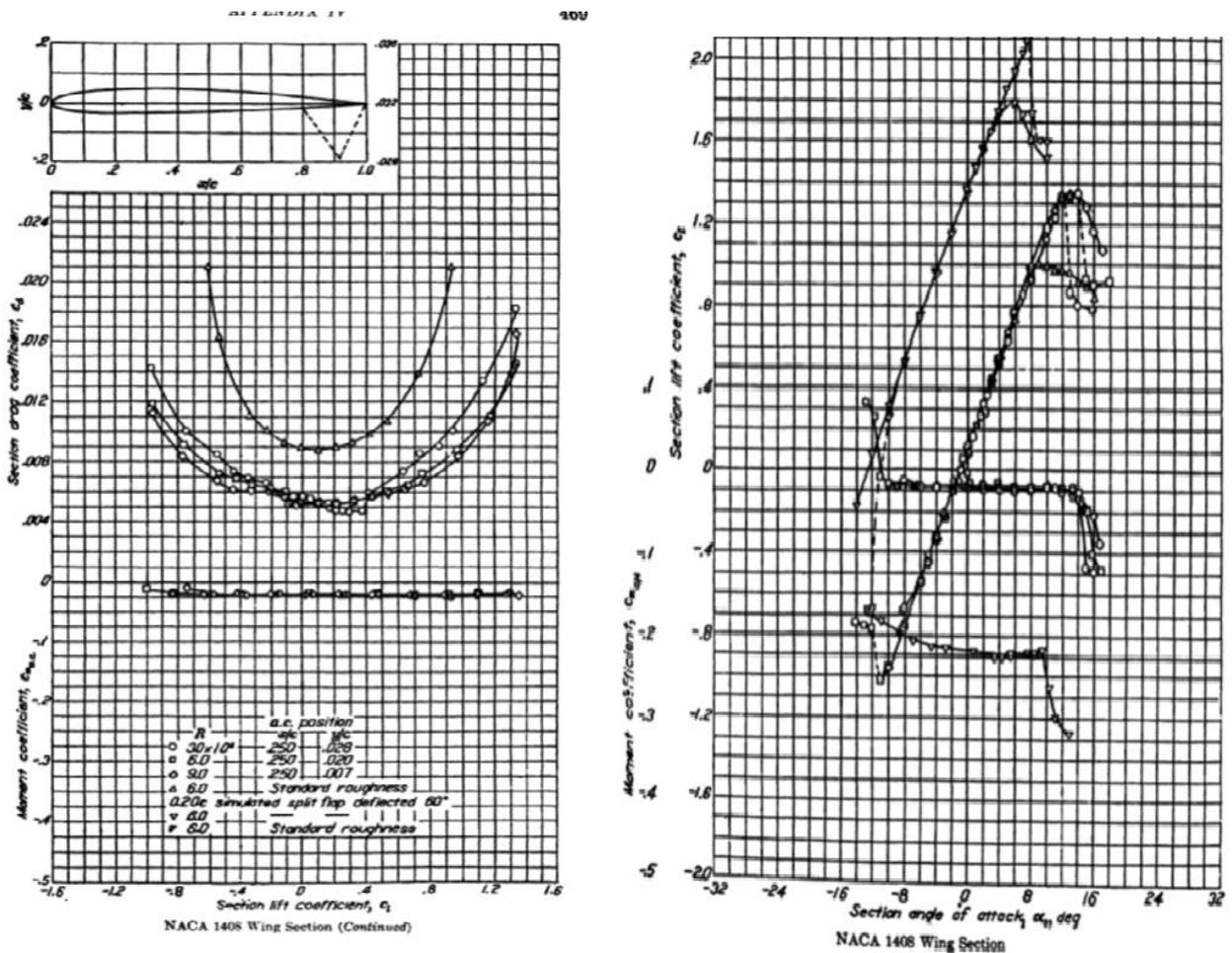
La función F_2 enunciada en la Ec. 4.24 también depende de la distancia de la celda respecto a la pared, entre más cerca mayor será F_2 por lo que se limita más la viscosidad turbulenta en ese caso.

$$F_2 = \tanh[[arg]^2], \quad arg = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega}\right)$$

Capítulo 5

Análisis y Resultados

Hemos llegado a la última etapa del proyecto que es la validación de los resultados experimentales luego de recorrer el camino necesario para evitar el uso de una herramienta CFD como una caja negra y aún más sin saber que es el modelamiento de la turbulencia y como se diferencian unos modelos de otros desde sus principios físicos. El modelo turbulento elegido fue el SST $k-\omega$ debido a su habilidad de simular mejor que otros un fenómeno tan importante en la aeronáutica como el desprendimiento de la capa límite de una superficie, el funcionamiento del modelo se explica en detalle en el capítulo 4. La figura a continuación fue el control para la comparación, consiste en 2 gráficas que muestran la relación entre los coeficientes de sustentación y arrastre a un ángulo de ataque en particular, estos resultados que se encuentran en el texto *Theory of wing sections* del año 1959 provienen de la experimentación en túnel de viento por parte de la antigua NACA. Dichas pruebas se compararon con las numéricas obteniendo los resultados que se muestran en el capítulo.



(a) Coeficiente de arrastre experimental

(b) Coeficiente de sustentación experimental

Figura 5.1: Coeficientes aerodinámicos del perfil NACA 1408. Por Abbot y Von Doenhoff (1959)

5.1 Reportes de Ansys Fluent

Las condiciones iniciales establecidas para la simulación numérica son las siguientes:

- Número Reynolds: $6 \cdot 10^6$.
- Densidad: $1.1767 \frac{kg}{m^3}$
- Velocidad de la corriente libre (V_∞): $50 \frac{m}{s}$
- Viscosidad dinámica molecular (μ): $9.81 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{m \cdot s}$
- Longitud cuerda del perfil: $1m$.
- El ángulo de ataque empieza en cero grados aumentando progresivamente hasta llegar al máximo de 14 grados.

5.1.1 Dominio y condiciones de frontera

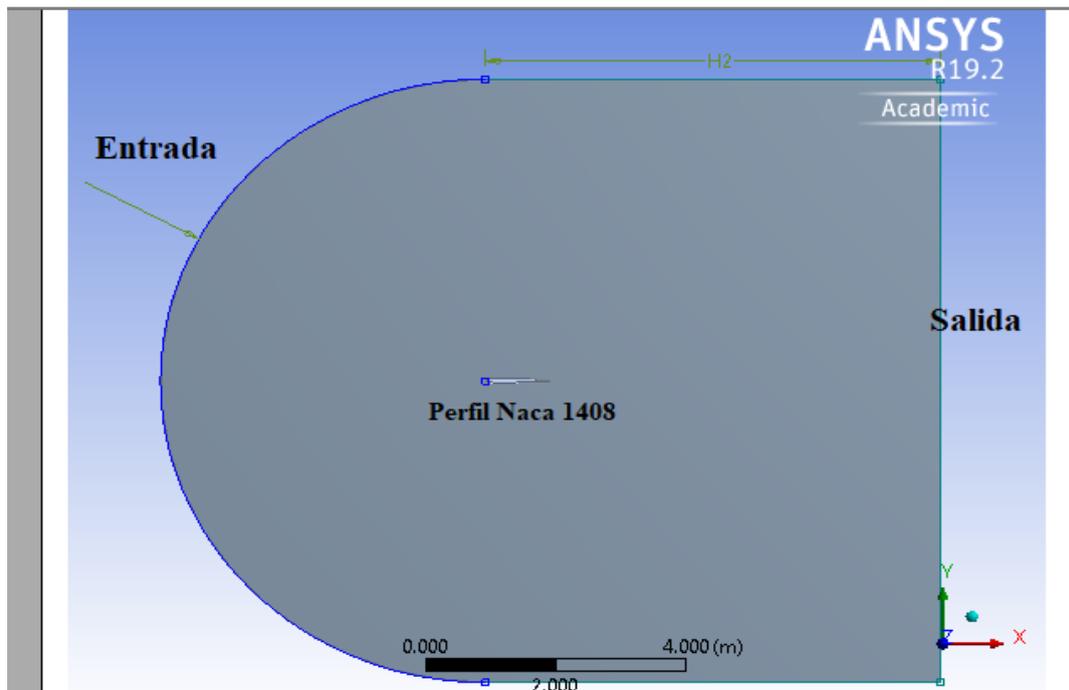


Figura 5.2: Zonas del dominio para el análisis.

Frontera	Distancia hasta el perfil	Configuración en el sistema
Entrada	18m o 18 cuerdas del perfil.	<p>Velocidad de entrada: especificando sus componentes en X y Y dependiendo del ángulo de ataque.</p> <p>Condiciones de turbulencia en la entrada tomando un porcentaje del 5% de intensidad turbulenta y la velocidad de la corriente libre:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ $k = 9.38 \frac{m^2}{s^2}$ ➤ $\epsilon = 2.58 \frac{m^2}{s^3}$ ➤ $\omega = 3.06 s^{-1}$ ➤ $\nu_t = \frac{k}{\omega} = 2.97 \frac{m^2}{s}$
Perfil Naca 1408	-----	<p>Condición de no deslizamiento (No slip condition) con pared estacionaria: Donde la velocidad normal al perfil es cero también. $\vec{V} \cdot \hat{n} = 0$</p>
Salida	25m o 25 cuerdas del perfil	<p>Presión a la salida: Manteniendo en cero la presión manométrica y dejando el valor por defecto (5%) de la intensidad de la turbulencia de contraflujo debido a la buena distancia desde la salida hasta la zona del perfil. La presión calculada es la total definida como:</p> $P_{tot} = P + \frac{1}{2} \rho V ^2$

5.1.2 Enmallado y manejo de la capa límite.

Las mallas utilizadas fueron de tipo C estructuradas, una gruesa, una mediana y una fina, en esta última se procuró tener un buen número de celdas en la capa límite. Dentro de la capa era importante que el primer centro de celda contigua a la superficie del perfil estuviera en la subcapa viscosa ($y^+ < 5$) la cual es una región muy pequeña pero importante en cuanto al cálculo de los esfuerzos generados, en este caso se logró un número y^+ promedio de 1.86 como se aprecia en la figura 5.4.

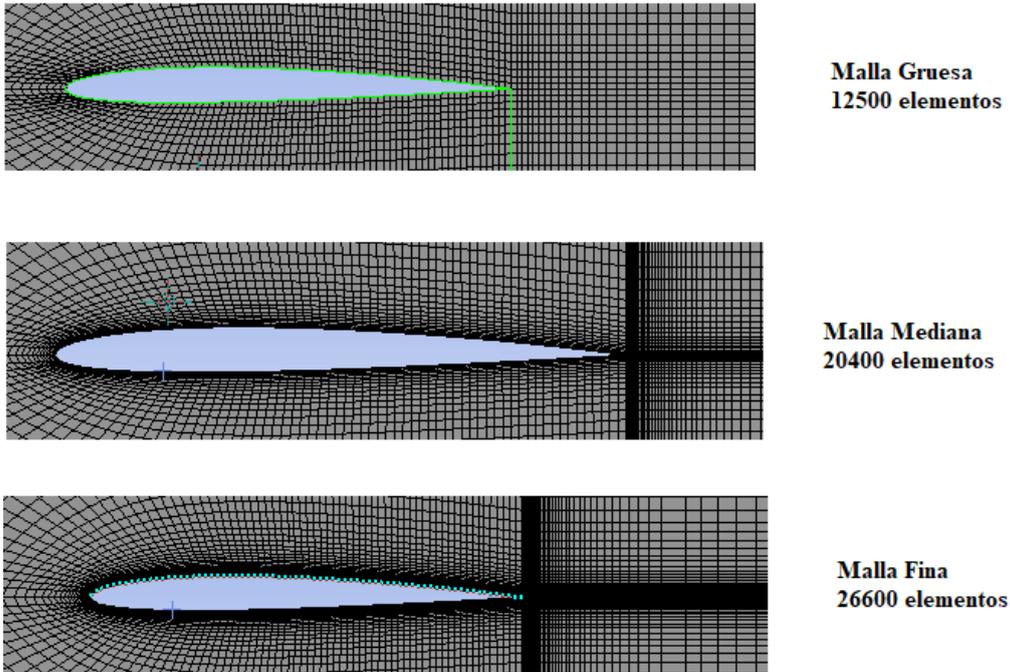


Figura 5.3: Tipos de malla.

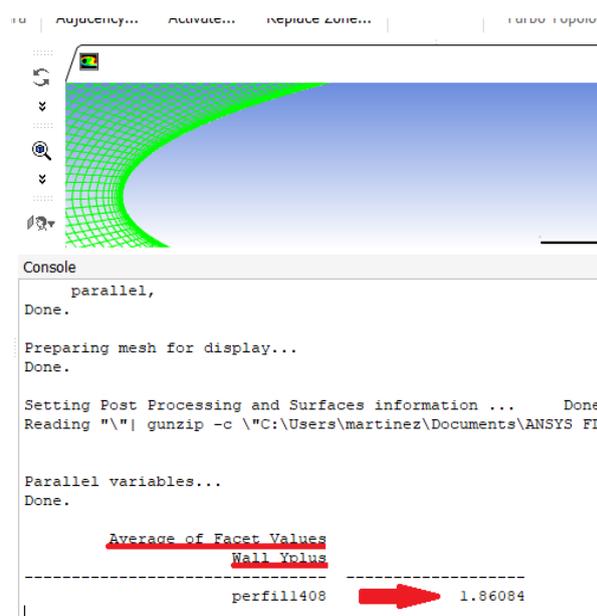


Figura 5.4: Reporte del valor y^+ promedio sobre la superficie del perfil NACA 1408.

5.1.3 Reporte de Residuales.

Como se apreció en el capítulo 3 del presente texto las soluciones de las ecuaciones no son exactas sino aproximaciones, cada celda entrega un desequilibrio y la sumatoria de estos se conoce como residual; En el software los residuales de masa, componentes de velocidad, k y omega ω se configuraron para llegar a un valor de 10^{-6} minimizando así el error propio de la solución numérica.

La conservación de la masa se cumple en el dominio, mostrando un residual de 5.84×10^{-7} (Fig. 5.5), un valor que está dentro de la tolerancia estipulada y es muy cercano a cero.

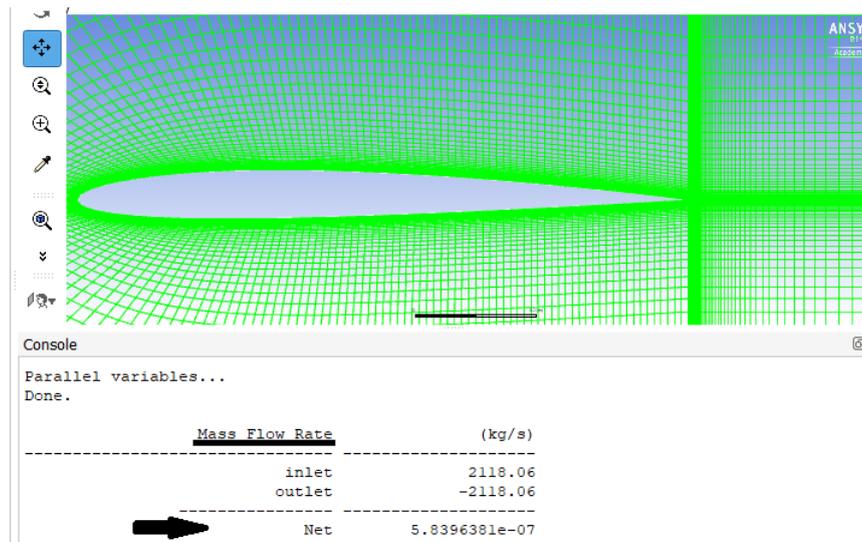


Figura 5.5: Reporte tasa neta del flujo másico en el dominio

La gráfica mostrada a continuación en la figura 5.6 es importante en cualquier análisis CFD pues muestra como la magnitud de los residuales disminuye con el avance en el número de iteraciones hasta lograr la convergencia la cual no siempre se consigue por aspectos como una malla no adecuada o el método de solución empleado para k o ω ya sea de primer o segundo orden.

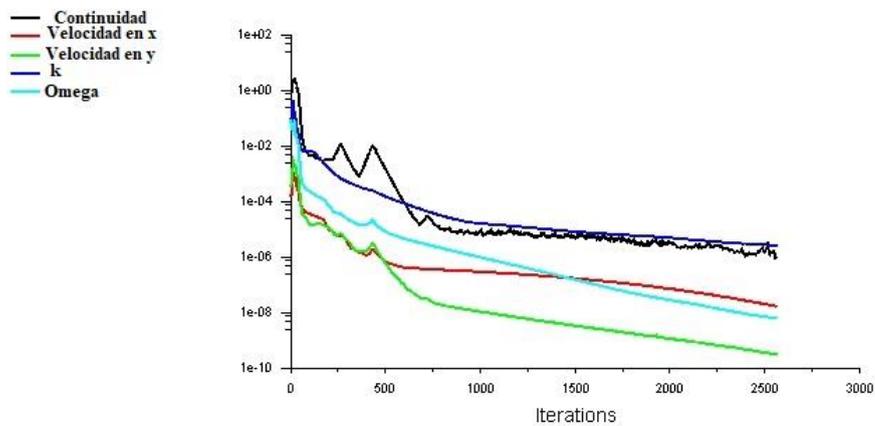
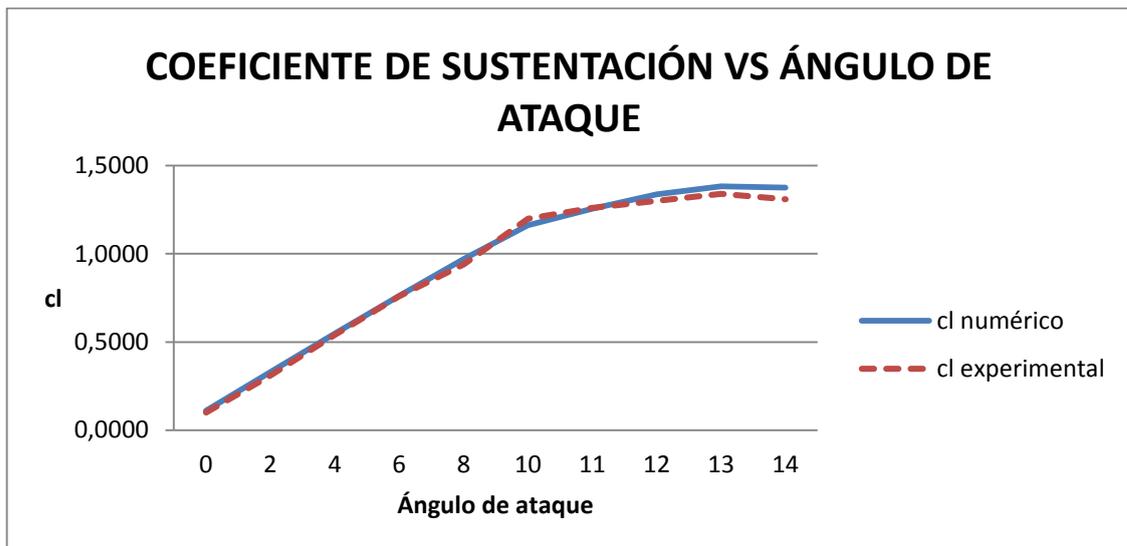


Figura 5.6: Gráfica de Residuales vs Número de iteraciones

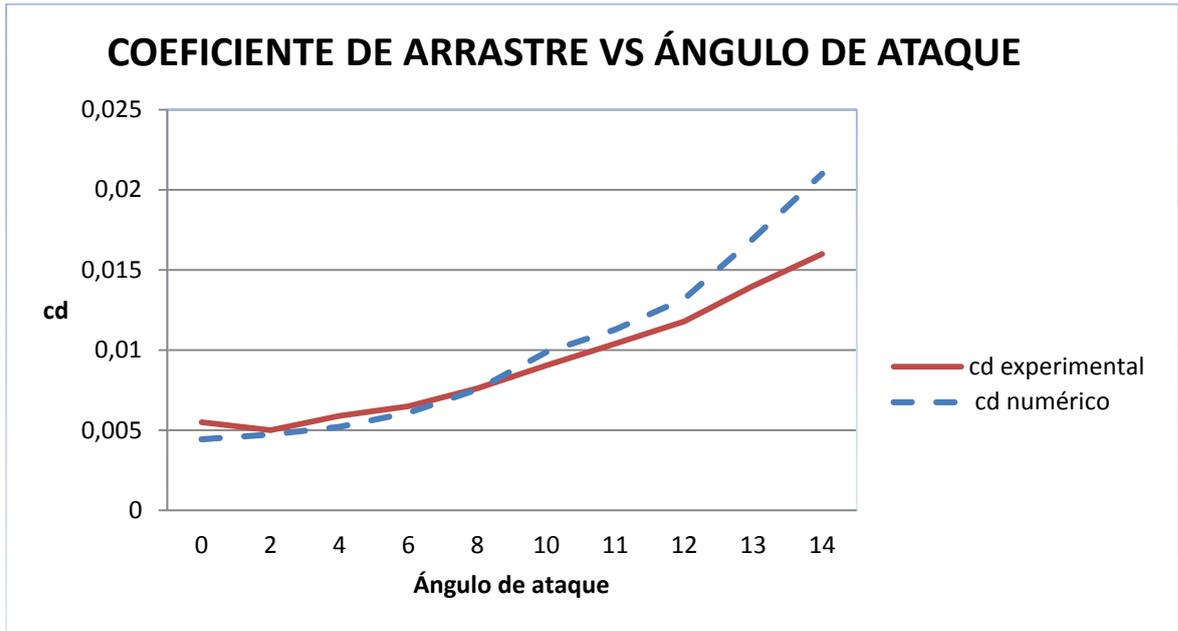
5.2 Validación numérica de los coeficientes aerodinámicos experimentales pertenecientes al perfil NACA 1408.

Angulo de ataque	Malla gruesa	Malla mediana	Malla Fina	cl experimental	% Error	Malla gruesa	Malla media	Malla fina	cd experimental	% Error
	cl	cl	cl			cd	cd	cd		
0	0.2150	0.1800	0.1100	0.1091	0.82493126	0.11024	0.07524	0.00524	0.0055	4.72727273
2	0.4200	0.3850	0.315	0.318	0.94339623	0.10973	0.07473	0.00473	0.005	5.4
4	0.6529	0.6179	0.548	0.54	1.4667963	0.1106	0.0756	0.0056	0.0059	5.08474576
6	0.8750	0.8400	0.770	0.76	1.31578947	0.111055	0.076055	0.006055	0.0065	6.84615385
8	1.0560	1.0210	0.951	0.94	1.17021277	0.1132	0.0782	0.0082	0.0076	7.89473684
10	1.3250	1.2900	1.220	1.2	1.66666667	0.115054	0.080054	0.010054	0.0091	11.0939227
11	1.3350	1.3000	1.230	1.26	2.38095238	0.116626109	0.08162611	0.01162611	0.0104	11.7895132
12	1.4428	1.4078	1.338	1.3	2.90670769	0.1185	0.0835	0.0135	0.0118	14.4067797
13	1.4883	1.4533	1.383	1.34	3.23158955	0.12212	0.08712	0.01712	0.0140	22.2857143
14	1.4800	1.4450	1.375	1.31	4.96183206	0.1256	0.0906	0.0206	0.0160	28.75

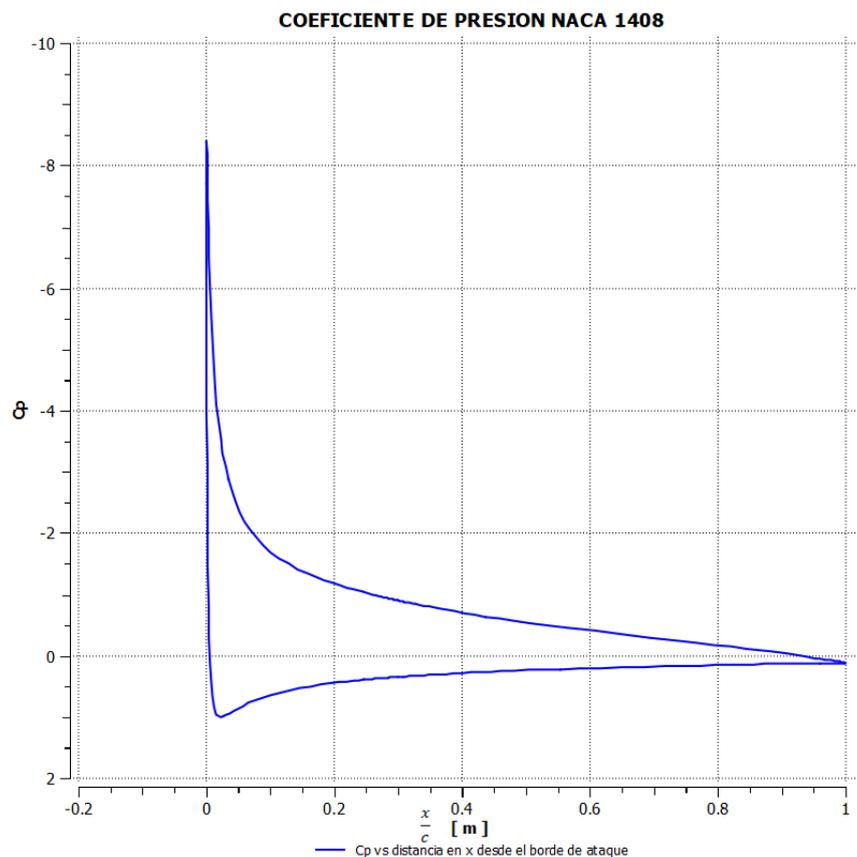


El resultado de comparar el coeficiente de sustentación del perfil entre las pruebas experimentales y la numérica con la malla refinada mostró un error relativo promedio del 2.1% evidenciando una elevada convergencia.

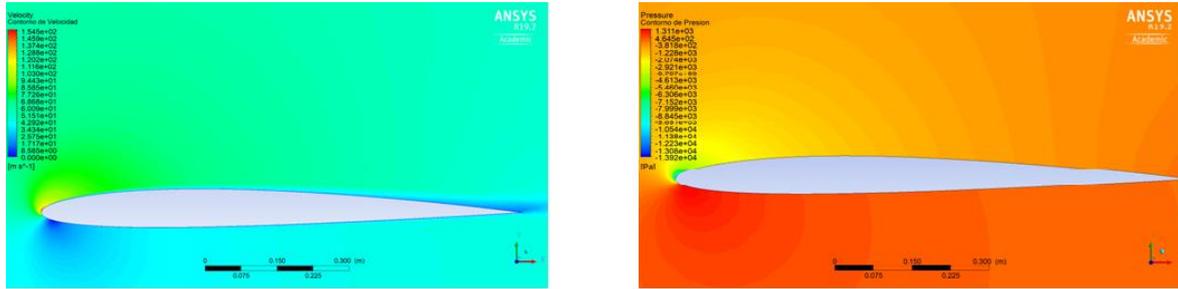
La gráfica a continuación muestra la comparación entre los datos experimentales y la simulación computacional con la malla fina del coeficiente de arrastre mostró un error relativo promedio del 12%, se evidencia la mayor diferencia después de los 10 grados de ángulo de ataque debido a la dificultad de simular la separación de la capa límite por los gradientes de presión adversa actuantes y está dentro del error propio de las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas (RANS).



Finalmente a continuación tenemos el coeficiente de presión a lo largo del perfil aerodinámico a un ángulo de ataque de 10 grados, el eje y se invirtió para evidenciar mejor el fenómeno de baja presión en el extradós del perfil y la alta presión en el intradós del mismo. Notese como a partir del 60% de la cuerda, la presión aumenta drásticamente en el extradós llegando a tener un coeficiente positivo cerca del borde de fuga, esto debido a los gradientes de presión adversa y el desprendimiento de la capa límite.



5.3 Contornos del perfil a un ángulo de ataque de 10 grados.



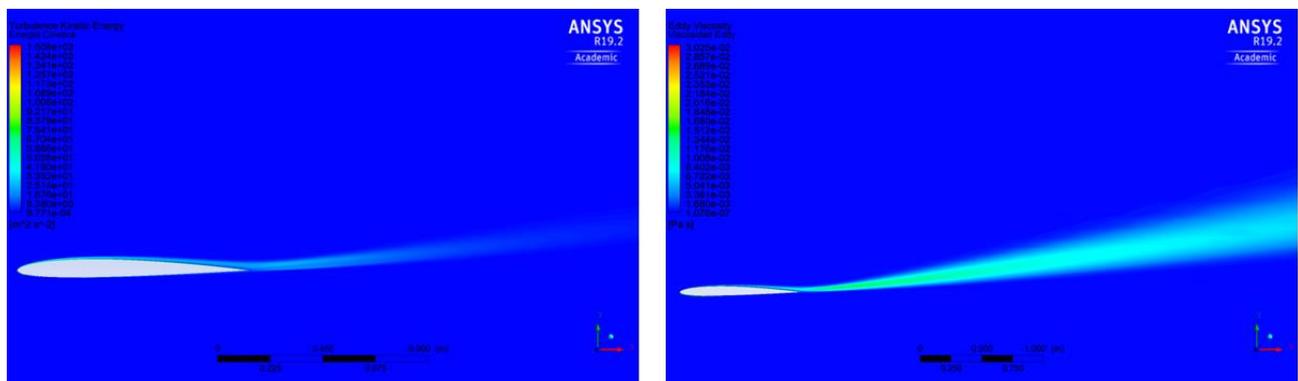
(a) Contorno de Velocidad (b) Contorno de presión

Figura 5.7: Contornos de velocidad y presión perfil NACA 1408

Los contornos mostrados en la figura 5.7 recrean el proceso físico de un ala frente a una corriente, donde el aire que fluye sobre la parte del extradós más cercana al borde de ataque sufre una aceleración que disminuye la presión en la zona, de modo similar el aire que fluye sobre el intradós sufre una desaceleración con su correspondiente aumento de presión en dicha zona. Es importante notar como la parte más cercana al borde de fuga del extradós del perfil está sometida a gradientes de presión adversa reflejados en un descenso en la velocidad y su correspondiente color azul Fig. 5.7 (a). Dichos gradientes de presión adversa aumentan la presión en esa zona como se aprecia en la Fig. 5.7 (b) destruyendo el efecto sustentador de un ala.

La energía cinética turbulenta es un parámetro fundamental para la rotacionalidad de la turbulencia, dicha energía se extrae del flujo medio y se transfiere desde los remolinos de mayor tamaño hasta los más pequeños donde la viscosidad molecular la disipa en forma de calor. La figura 5.8(a) muestra como dicha propiedad aumenta en la zona de la capa límite y la estela que deja el flujo de aire por el perfil teniendo un valor máximo de $151.6 \frac{m^2}{s^2}$ en la zona del extradós más cercana al borde de ataque.

La viscosidad eddy que no es una propiedad del fluido (en este caso aire) sino de la turbulencia está relacionada con el tensor de esfuerzo turbulento que se traduce en fuerzas extra que aparecen en el análisis; la figura 5.8 (b) muestra que dicha propiedad aumenta considerablemente en la zona cercana al borde de fuga del perfil y en la estela que se va generando, estos esfuerzos extra están relacionados con el coeficiente de arrastre total del perfil aeronáutico.



(a) Contorno de la energía cinética turbulenta (b) Contorno Viscosidad Eddy

Figura 5.8: Contornos asociados a la turbulencia.

Capítulo 6

Conclusiones y Recomendaciones

- El proyecto permitió conocer a profundidad cómo funciona el método numérico del volumen finito en cuanto al manejo algebraico de las ecuaciones gobernantes, los errores producto de la discretización donde la interpolación influye y el error propio de linealizar las ecuaciones. Dichos errores producen residuales cuyo adecuado manejo se procuró en las simulaciones.
- Se comprendió la dificultad de tratar matemáticamente el esfuerzo turbulento o Reynolds debido a que es una correlación de componentes de velocidad fluctuante. La forma escogida de tratarlo fue la suposición de Boussinesq donde dicho esfuerzo Reynolds que es un tensor se relaciona linealmente con la tasa de deformación media S_{ij} mediante la propiedad llamada viscosidad turbulenta ν_t . El modelo turbulento $k - \omega$ SST fue el camino para hallar dicha viscosidad y por ende la contribución de la turbulencia a los coeficientes aerodinámicos del perfil.
- Se reafirma la validez del modelo $k - \omega$ SST para flujos que tienen dos regiones, una zona cercana a una superficie en este caso el perfil aerodinámico, aquí se usa alguna variación de los modelos $k - \omega$; y una zona con un flujo de corte libre donde la versión estándar $k - \epsilon$ tiene un comportamiento sobresaliente. Dicha transición entre modelos se realiza mediante las funciones de mezcla explicadas en el capítulo 4.
- Entre las dos aproximaciones para tratar la región cercana a la superficie del perfil que son usar funciones de pared o resolver la subcapa viscosa se eligió la segunda, para ello es necesario un valor y^+ lo más cercano a 1. Esta segunda opción es la más adecuada para problemas como este donde el coeficiente de arrastre era muy importante, pero se debe tener precaución con los errores producto de celdas que quedan con una alta oblicuidad generalmente en la región cercana al borde de fuga, por lo que se recomienda enmallar mediante el módulo ICEM de Ansys para evitar dicho inconveniente.
- Se recomienda tomar dos cursos ofrecidos por la plataforma Edx.org, *Introducción a la Aerodinámica* dado por el MIT y el curso *Una introducción práctica a las simulaciones de ingeniería* ofrecido por la universidad Cornell.

Bibliografía

- Huebsch, W., Munson, B., Okiishi, T., y Rothmayer, A. (2013) *Fundamental of fluid mechanics*. (7ta. Ed). Estados Unidos de America: John Wiley & Sons, Inc.
- Hassan, A., Hassan, G. y Youssef, M. (2014, Diciembre) Numerical Investigation of Medium Range Re Number Aerodynamics Characteristics for NACA 0018 Airfoil. *CFD letters*, 6(4). Recuperado de <http://www.issres.net/cfd/>.
- Timmer, W. (2008, 1 de diciembre) Two-dimensional low-Reynolds number wind tunnel results for NACA 0018. *Sage journals*, 32(6) 525-537.doi: 10.1260/030952408787548848
- Navarro, J. (2006) Simulación numérica del perfil NACA -0012. Recuperado de http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtual/publicaciones/rev_cedit/2006_V01/pdf/a03v1.pdf
- Nugroho, G. (2013) *Turbulent Flows: Prediction, Modeling and Analysis*. Nova Science Publishers, Inc.
- Woelke, M. (2007) Eddy Viscosity Turbulence Models employed by Computational Fluid Dynamics. *Institute of Aviation Scientific Publication Division*. Recuperado de https://ilot.edu.pl/eng_prace_ilot/?list_of_transactions/191_2007/07_Woelke.html
- Collado, C., Lucio, P. y Samperini, R. (1991) *Metodología de la Investigación*. (4ta. Ed). McGraw-Hill.
- Boutilier, M., Gerakopulos, R. y Yarusevych, S. (2010, 1 de Julio) Aerodynamic Characterization of a NACA 0018 Airfoil at Low Reynolds Numbers. *AIAA*. Recuperado de <https://doi.org/10.2514/6.2010-4629>.
- Davidson, L. (2017) *Fluid Mechanics, Turbulent flow and turbulence Modeling*. Suecia: Chalmers University of Technology.
- Muñoz, V. y Rogan J. (2008) *Apuntes de un curso de Física Matemática*. (3a. ed) Chile: Departamento de física.
- Abbot, I. y Von Doenhoff, A. (1959) *Theory of Wing Sections*. (2da. ed). Canada: Dover Publications, Inc.

- Wilcox, D. (1994) *Turbulence Modeling for CFD* (2da. ed). Estados Unidos: DCW Industries, Inc.
- Flores, D. (2006) *Diseño de Perfiles Aerodinámicos*. (Tesis de pregrado). Instituto Politécnico Nacional, DF, México.
- Wolfe, W., y Ochs, S. (1997) Predicting aerodynamic characteristic of typical wind turbine airfoils using CFD. Estados Unidos. doi:10.2172/534484.
- Saúl. (2010). *Física I Procesos Disipativos*. [Comentario en un blog]. Recuperado de <http://saul309fisica.blogspot.com/2010/11/procesos-disipativos.html>.
- Malalasekera, W., y Versteeg, H. (2007) *An Introduction to computational Fluid Dynamics*. Inglaterra: Pearson.
- Sadrehighi, I. *Turbulence Modeling a review*. CFD Open series Revisión 1.65; Annapolis Maryland.
- Anderson, Dale A., Tannehill, John C., y Plecher Richard H. (1984) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Hemisphere Publishing Corporation.
- Menter, F. (Octubre 1992) *Improved Two-Equation $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows*, memorando técnico de la NASA 103975. 6-21.
- Bredberg, J. (2000) *On the Wall Boundary Condition for Turbulence Models*. Reporte interno 00/4, Departamento de Termodinámica y dinámica de fluidos, Universidad tecnológica de Chalmers, Gotemburgo. 3-8.
- Anderson, John D. (2011). *Fundamentals of Aerodynamics*. (5^a Ed.) McGraw Hills Inc.