



LOS LIBERTADORES

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Análisis de perfiles de medidas repetidas en la evaluación de la granulometría de bases granulares

Fausto Andrés Molina Gómez

Fundación Universitaria Los Libertadores
Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas, Departamento de Ciencias Básicas
Especialización en Estadística Aplicada
Bogotá, Colombia
2017

Análisis de perfiles de medidas repetidas en la evaluación de la granulometría de bases granulares

Fausto Andrés Molina Gómez

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de:
Especialista en Estadística Aplicada

Asesor:

Martha Tatiana Jiménez Valderrama, Ph.D (c)

Línea de Investigación:

Diseño de Experimentos

Fundación Universitaria Los Libertadores
Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas, Departamento de Ciencias Básicas
Especialización en Estadística Aplicada
Bogotá, Colombia
2017

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a la profesora Tatiana Jiménez. Sus recomendaciones oportunas permitieron interpretar, desde la estadística, los resultados del trabajo y contextualizar el análisis en la Ingeniería Civil.

A Lenin Bulla, por despertar en mí el interés por aprender técnicas estadísticas para desarrollar trabajos innovadores en mi área de investigación, la Geotecnia. A Eduardo Dulcey, de la Universidad Militar Nueva Granada, por apoyarme en la selección de los materiales de estudio y la ejecución de los ensayos de laboratorio. A Martín Estrada, por presentarme las ventajas de escribir documentos en \LaTeX y aclarar todas las inquietudes que surgieron durante el desarrollo de este trabajo.

Por último, a la Fundación Universitaria Los Libertadores; principalmente, a los profesores y cuerpo administrativo del programa de Especialización en Estadística aplicada. Gracias a ellos me fue posible identificar herramientas clave que me permitirán manejar e interpretar información desde un enfoque cuantitativo y de vanguardia en mi disciplina.

Resumen

Este trabajo aborda la implementación de un diseño de experimentos que evalúa el cumplimiento de las especificaciones del Instituto Nacional de Vías (INVIAS), en la elección de materiales para la construcción de carreteras. La metodología de trabajo se basó en la selección de tres materiales granulares diferentes, el cálculo de la distribución del tamaño de partículas y la validación de las curvas granulométricas con las especificaciones de construcción del INVIAS. Se desarrolló un plan experimental que incluyó la ejecución de ensayos de granulometría por tamizado. Además, se compararon las distribuciones de los tres materiales con las franjas granulométricas fijadas en el Artículo 330 de la misma. Por otra parte, se aplicó la técnica de análisis de perfiles de medidas repetidas para medir la variabilidad entre los datos experimentales con los normativos. Los resultados muestran que es posible evaluar el cumplimiento de las bases granulares diferentes con lo establecido por el INVIAS, a través del diseño de experimentos con análisis estadístico multivariado. De esta manera, se logró establecer un procedimiento alternativo que permite contrastar cuantitativamente las curvas granulométricas de bases granulares con los parámetros establecidos por la normatividad vigente.

Palabras clave: análisis de perfiles de medidas repetidas, bases granulares, curvas granulométricas, diseño de experimentos, especificaciones de construcción INVIAS.

Abstract

This work addresses the implementation of an experiment design that validates the fulfilment of the INVIAS construction specifications, in the choice of materials for road building. The methodology was based on the selection of three different granular materials, the grain size assessment and the comparison between the experimental data with the parameters of the specifications. Also, was contrasted the three grain size curves against the granulometric ranges settled into the Article 330 of the INVIAS standards. On other hand, was applied the repeated measures profiles method, in order to establish the variability of the findings. Results show that it is possible to compare the granular bases according to INVIAS specification through design of experiments with statistical multivariate analysis. Thereby, it was possible to establish an alternative procedure that allows to perform a quantitative comparison of granulometric curves of granular bases with the parameters established by current regulations.

Key words: Analysis of repeated measures profiles, design of experiments, granular bases, grain size curves, INVIAS construction specifications.

CONTENIDO

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Abstract	viii
Introducción	1
1 Marco conceptual	3
1.1 Pavimento	3
1.2 Bases Granulares	4
1.3 Curva granulométrica	5
1.4 Especificaciones de construcción INVIAE	6
1.5 Disposiciones generales para la ejecución bases granulares	7
2 Marco teórico	9
2.1 Diseño y análisis de experimentos	9
2.2 Diseño de experimentos completamente aleatorizados	10
2.3 Análisis de perfiles de medidas repetidas	11
3 Marco metodológico	15
3.1 Fase 1	15
3.2 Fase 2	15
3.3 Fase 3	16
3.4 Fase 4	16
4 Resultados y análisis	17

4.1	Resultados experimentales	17
4.2	Experimento	18
4.2.1	Descriptiva de datos	18
4.2.2	Análisis de varianza	19
4.2.3	Estimaciones: intervalos de confianza	20
4.2.4	Comparaciones múltiples, método de Tuckey	22
4.2.5	Homogeneidad de datos	24
4.3	APMR	25
	Conclusiones	29
	Referencias	31

LISTA DE FIGURAS

1-1	Estructuras típicas de pavimento: (a) flexible; (b) rígido	4
1-2	Ejemplo de curva granulométrica	5
1-3	Franjas granulométricas de las Bases Granulares de Gradación Gruesa .	8
2-1	Representación gráfica de las hipótesis nulas de perfiles en medidas repetidas: (a) paralelismo; (b) horizontalidad; (c) coincidencia.	12
4-1	Box plot de la distribución de tamaños de partícula en la cantera A . . .	18
4-2	Box plot de la distribución de tamaños de partícula en la cantera B . . .	18
4-3	Box plot de la distribución de tamaños de partícula en la cantera C . . .	19
4-4	Intervalos de confianza para la cantera A	20
4-5	Intervalos de confianza para la cantera B	21
4-6	Intervalos de confianza para la cantera C	21
4-7	Comparaciones múltiples de la cantera A	23
4-8	Comparaciones múltiples de la cantera B	23
4-9	Comparaciones múltiples de la cantera C	24
4-10	Perfiles de la cantera A	26
4-11	Perfiles de la cantera B	27
4-12	Perfiles de la cantera C	27

LISTA DE TABLAS

1-1	Serie cuadrada de tamices	6
1-2	Niveles de tránsito (INVIAS, 2013a)	7
1-3	Rangos del material de base granular (INVIAS, 2013c)	8
4-1	Repeticiones de granulometría para la canteras A, B y C	17
4-2	Análisis de varianza para los materiales de estudio	20
4-3	Análisis de homogeneidad para los materiales de estudio	25
4-4	Resultados de las pruebas para el APMR	26

INTRODUCCIÓN

En Colombia las vías se construyen según la normatividad INVIAS del 2013. Allí se establecen los procedimientos de ensayo para la caracterización de los materiales utilizados en la construcción de carreteras. Además, se disponen los parámetros mínimos, que estos materiales, deben cumplir según las disposiciones de calidad del proyecto. Sin embargo, en el caso de las bases granulares, el control que se le realiza a su distribución de tamaño de partículas o granulometría se basa en métodos de comparación gráfica. Por lo tanto, es necesario establecer una metodología que permita validar si los materiales se encuentran dentro de los límites establecidos por la normatividad vigente. De esta manera, en este trabajo se busca plantear un procedimiento para la evaluación de la distribución del tamaño de partículas enfocado en el análisis, el contraste y la comparación de tres diferentes materiales granulares de forma cuantitativa. Mediante dicho procedimiento se busca de la validación del cumplimiento de la granulometría de los agregados pétreos utilizados en la construcción de bases granulares.

Planteamiento del problema

La validación entre los resultados de los ensayos de tamaños de partículas y los parámetros establecidos por la normatividad vigente se realiza, tradicionalmente, mediante la comparación gráfica o visual de las curvas granulométricas Aponte Hincapie (2016). Kuhn y Bagi (2009) afirman que la distribución de tamaño de partículas influye notablemente en la resistencia al corte y el nivel de deformación en materiales granulares. Dentro de los estudios para la evaluación de distribución de tamaño de partículas, que involucran análisis estadísticos, se destaca el de Weibull (1951). En dicho trabajo se presenta la aplicación de una distribución de probabilidad para predecir la granulometría de cenizas volantes. Yin, Hicher, Dano, y Jin (2017) realizaron compara-

ciones entre ajustes numéricos de la distribución de probabilidad acumulada de Weibull y algunas granulometrías para predecir la resistencia al corte en suelos granulares muy gruesos. No obstante, el dicho estudio es el ejemplo reciente más cercano en el que se confronta algún modelo estadístico con los tamaños de partícula. Según lo anterior, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Es posible implementar una técnica de análisis estadístico en la comparación de resultados experimentales con los parámetros establecidos en la normatividad INVIAS?

Objetivos

Objetivo general

Implementar un diseño de experimentos, con el fin de establecer una metodología que permita validar el cumplimiento de la granulometría de los materiales utilizados para la construcción de bases granulares según los parámetros de las especificaciones INVIAS vigentes.

Objetivos específicos

- I. Seleccionar tres materiales granulares diferentes, por medio visitas a diferentes zonas de explotación, para establecer el material a estudiar.
- II. Estimar la distribución de tamaño de partículas, a través de la ejecución de ensayos de laboratorio, con el propósito de obtener las curva granulométricas de cada uno de los materiales seleccionados.
- III. Comparar los resultados experimentales obtenidos en laboratorio, mediante el diseño de un experimento completamente aleatorizado y la aplicación de la técnica de análisis de perfiles de medidas repetidas, con el fin de encontrar la variabilidad de los mismos respecto a la normatividad INVIAS.
- IV. Proponer un procedimiento, mediante las comparaciones entre las franjas granulométricas y los resultados experimentales, para evaluar si los materiales empleados en la construcción de carreteras se encuentran dentro de los rangos establecidos.

CAPÍTULO 1

MARCO CONCEPTUAL

1.1 Pavimento

Se conoce como pavimento al conjunto de capas superpuestas, relativamente horizontales, que se diseñan y construyen técnicamente con materiales apropiados y compactados (Montejo, 2002). Dichas capas de material se seleccionan para recibir en forma directa las cargas del tránsito y las transmitir las a los estratos inferiores en forma disipada. Por lo tanto, se garantiza que los vehículos circulen sobre una superficie de rodamiento suave y sin ondulaciones. De esta manera, lo que busca la estructura de pavimento es disminuir la magnitud de las cargas superficiales hacia el suelo natural o de subrasante.

Por lo general, la capa que le da el soporte principal al pavimento es la base granular. Así pues, la base granular está conformada por material seleccionado y que cumple con ciertas especificaciones de calidad; de tal manera que las deformaciones del pavimento estén dentro un rango admisible. No obstante, en cualquier estructura de pavimento el componente que sobresale es la capa de rodadura. Dicha capa puede estar construida con concreto asfáltico o hidráulico; lo anterior está sujeto a la disponibilidad de materiales y el tipo de diseño propuesto.

En Colombia los estructuras de pavimento, comúnmente, más utilizadas son las flexibles y las rígidas. Cada uno de estos tipos de pavimento está compuesto por una capa rodadura, que es de concreto asfáltico para los pavimentos flexibles o de concreto hidráulico para los pavimentos rígidos, una base granular y una sub-base granular (ver Figura 1-1)

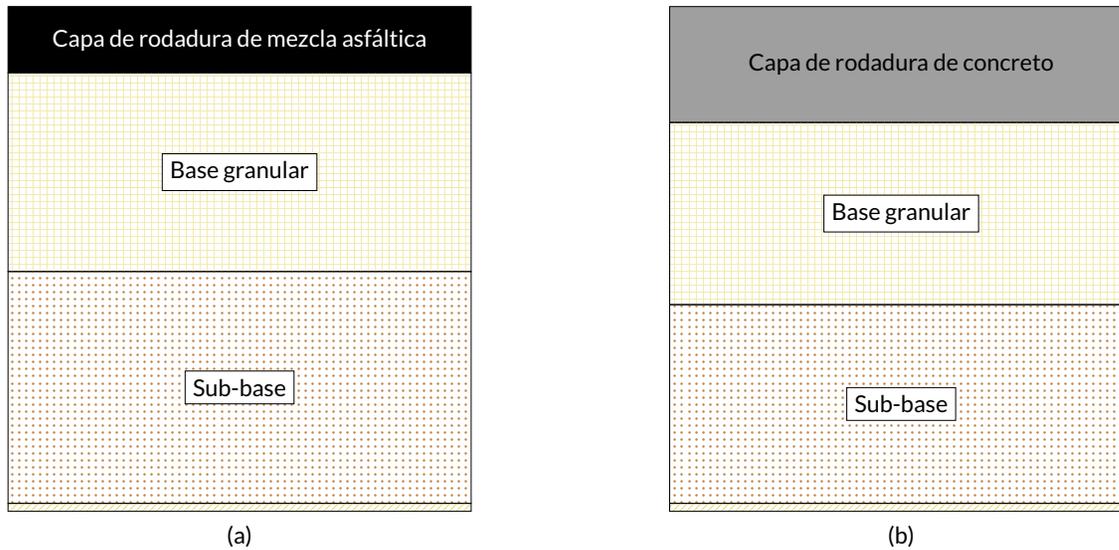


Figura 1-1 Estructuras típicas de pavimento: (a) flexible; (b) rígido

1.2 Bases Granulares

La base granular es una capa de material que compone una estructura de pavimento y que se encuentra inmediatamente por debajo de la carpeta de rodadura (Huang, 2004). Dicha capa está compuesta por agregados pétreos que pueden estar sueltos o ligados mediante agentes estabilizantes. Por otro lado, se encarga de dar soporte al pavimento y reducir la transmisión de esfuerzos a la subrasante. De este modo, gracias a la rigidez de las partículas, su principal función es disipar las cargas impuestas por el tránsito de vehículos (Rondón & Reyes, 2015). No obstante, la base granular puede estar o no estar construida directamente sobre el suelo natural. Sin embargo, esta capa debe construirse con materiales seleccionados de buena calidad. Para (Reyes, 2003) los criterios principales para seleccionar una base granular son:

- El índice de capacidad portante.
- La estabilidad del material.
- La dureza de su esqueleto.
- La resistencia a la tracción al ligar sus partículas.
- La disponibilidad en la zona.

1.3 Curva granulométrica

La distribución de tamaño, o también conocida como granulometría, corresponde a la gráfica que presenta el porcentaje de material granular que pasa a través de cierta abertura en función del diámetro de la partícula. Dicha gráfica establece la cantidad masa y el rango de tamaños del material (Knappett & Craig, 2012). Por otro lado, el resultado de esta propiedad física se representa mediante gráfica de una curva en escala semi-logarítmica. La Figura 1-2 expone la curva granulométrica, típica, de un suelo. Sin embargo, para ver la granulometría de una base granular de la sabana de Bogotá consulte Molina-Gómez, Camacho-Tauta, y Reyes-Ortiz (2016).

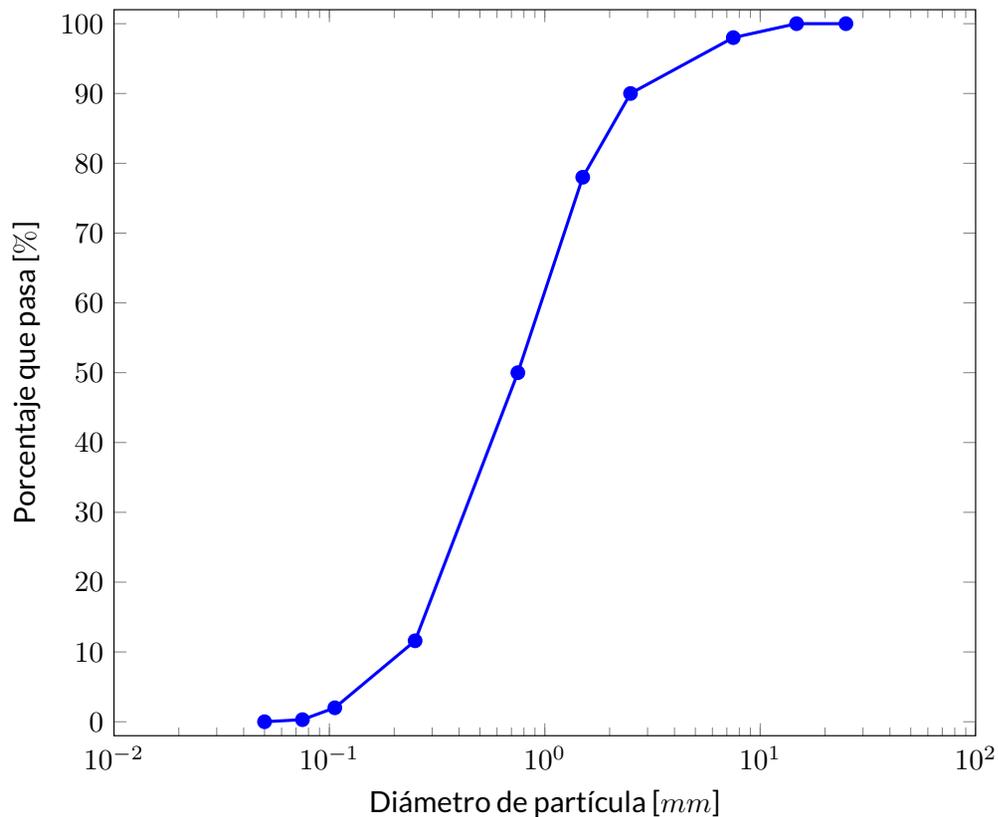


Figura 1-2 Ejemplo de curva granulométrica

La curva granulométrica de un suelo se obtiene mediante un procedimiento estandarizado, en Colombia, por la Norma de INV-E 123 (INVIAS, 2013d). Allí se establece un método de ensayo de laboratorio, en el que se selecciona una cantidad de material de-

terminada y se agita, posteriormente, con el fin de dejar pasar las partículas de suelo a través de serie de mallas.

Dichas mallas se encuentran en el interior de un recipiente denominado tamiz. Además, las aberturas de cada una de las mallas se encuentra pre-establecida o estandarizada, con el fin de unificar los ensayos de granulometría. Los tamaños establecidos por la normatividad INVIAS (2013d) se muestran en la Tabla 1-1.

Tamiz	Abertura [mm]
3"	75.00
50"	50.00
1 1/2"	37.5
1"	25.0
3/4"	19.0
3/8"	9.50
No. 4	4.75
No. 10	2.00
No. 20	0.850
No. 40	0.425
No. 60	0.250
No. 140	0.106
No. 200	0.075

Tabla 1-1 Serie cuadrada de tamices

1.4 Especificaciones de construcción INVIAS

En Colombia el INVIAS establece tanto la normatividad de ensayos, como las especificaciones de construcción de vías. De esta manera, se regulan los procesos de evaluación de calidad de materiales y los procesos constructivos de este tipo de infraestructura. Las especificaciones generales de construcción de Carreteras tienen como propósito controlar los contratos de construcción, rehabilitación, rectificación, mejoramiento y conservación de las carreteras y puentes a cargo de la nación. Así pues, el INVIAS (2013a) define dichos documentos como el conjunto de disposiciones que especifican las exigencias sobre los materiales a utilizar. Además, decretar las pruebas de control de calidad en las diferentes etapas de la construcción y las modalidades para la medida y el pago de la obra ejecutada. Asimismo, la preparación del material se debe realizar en conformidad con los alineamientos, pendientes y dimensiones indicados en los planos y demás documentos del proyecto o establecidos por la interventoría.

1.5 Disposiciones generales para la ejecución bases granulares

De manera puntual, la construcción de bases granulares está establecida por el Artículo 330 de las especificaciones de construcción (INVIAS, 2013c). Al mismo tiempo, INVIAS (2013b) establece que el propósito de la regulación del proceso constructivo de dichas capas consiste en recomendar el suministro, transporte, colocación, humedecimiento o aireación, extensión y conformación, compactación y terminado de material de base granular sobre una superficie preparada.

En concordancia con lo anterior, la selección preliminar de los agregados pétreos a utilizar como material de bases granulares se realiza de acuerdo con un criterio basado en el tamaño de partículas. Así pues, la normatividad establece unos rangos de para el cumplimiento de la granulometría según el tránsito del pavimento. Los niveles de tránsito establecidos por INVIAS (2013a) son tres $N1$, $N2$ y $N3$; su denominación se presenta en la Tabla 1-2.

Nivel de tránsito	Número de ejes equivalentes [millones de 80 kN]
$N1$	$N_{80kN} \leq 0.5$
$N2$	$0.5 < N_{80kN} \leq 5.0$
$N3$	$N_{80kN} > 5.0$

Tabla 1-2 Niveles de tránsito (INVIAS, 2013a)

A partir del nivel de tránsito de la vía se selecciona el tipo de base granular a compactar en la estructura de pavimento. Dichos tipos son Bases Granulares de Gradación Gruesa y Bases Granulares de Gradación Fina. La evaluación de la distribución de tamaño de partículas se realiza bajo el procedimiento de la norma de ensayo INV-E-123 (INVIAS, 2013d). Por otra parte, los rangos establecidos por el Artículo 330 de las especificaciones de construcción (INVIAS, 2013c) se presentan la Tabla 1-3. Sin embargo, los materiales utilizados en la construcción de bases granulares corresponden suelos de gradación gruesa. Por lo tanto, la Figura 1-3 muestra las franjas granulométricas reglamentadas para este tipo de material.

Tamiz	Serie Abertura [mm]	Gradación Gruesa		Gradación Fina	
		BG-40	BG-27	BG-38	BG-25
1 1/2"	37.5	100	-	100	-
1"	25.0	75 - 100	100	70 - 100	100
3/4"	19.0	65 - 90	75 - 100	60 - 90	70 - 100
3/8"	9.5	45 - 68	52 - 78	45 - 75	50 - 80
No. 4	4.75	30 - 50	30 - 50	30 - 60	35 - 65
No. 10	2.00	15 - 32	15 - 32	20 - 45	20 - 45
No. 40	0.425	7 - 20	7 - 20	10 - 30	10 - 30
No. 200	0.075	0 - 9	0 - 9	5 - 15	5 - 15

Tabla 1-3 Rangos del material de base granular (INVIAS, 2013c)

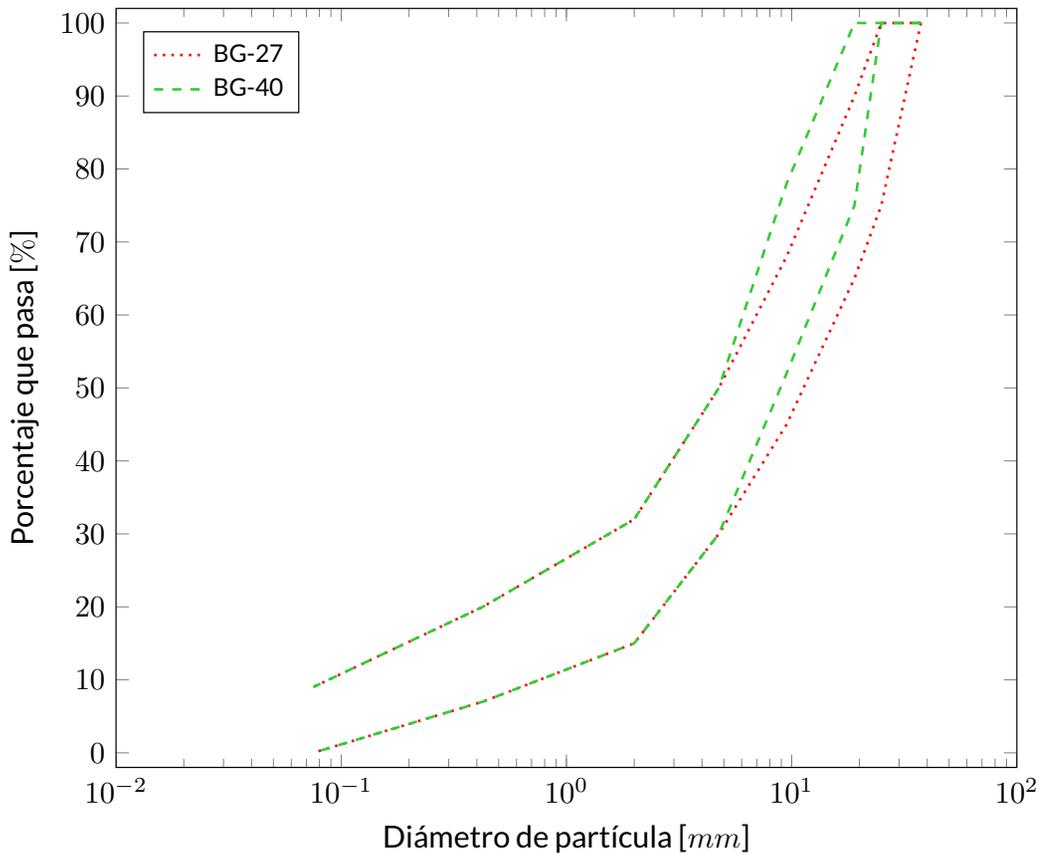


Figura 1-3 Franjas granulométricas de las Bases Granulares de Gradación Gruesa

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Diseño y análisis de experimentos

Un experimento es una prueba o serie de pruebas que se realizan con el fin de establecer la variabilidad del efecto medio en un producto, proceso o sistema a partir de la aplicación de un tratamiento (Montgomery, 2013). Por consiguiente, el diseño de experimentos es una herramienta estadística poderosa que permite comparar tratamientos de manera eficaz. Además, proporciona la información relacionada con las implicaciones que trae la aplicación de uno o varios tratamientos sobre la unidad experimental. Sin embargo, para Anderson, Sweeney, Williams, Camm, y Cochran (2017) antes de realizar cualquier experimento es necesario tener en cuenta las siguientes pautas:

- Formular el problema de investigación.
- Identificar la variable interés.
- Seleccionar los factores, niveles y rangos.
- Elegir el tipo de diseño experimental.
- Definir el número de observaciones o repeticiones del experimento.
- Aplicar los tratamientos.
- Ejecutar el diseño.
- Analizar estadísticamente los resultados del experimento.
- Contextualizar los resultados en la disciplina.
- Concluir y recomendar.

De esta manera, los experimentos buscan validar hipótesis de investigación. Dichas hipótesis suelen relacionarse directamente con el problema de estudio. Por lo tanto, la interpretación adecuada del análisis estadístico requiere la comprensión del modelo y el fundamento teórico del tipo de investigación (Kuehl, 2000).

2.2 Diseño de experimentos completamente aleatorizados

En cualquier experimento puede presentarse variabilidad asociada a un factor perturbador. En general, el factor perturbador incide en los resultados o respuesta del experimento. Además, en ocasiones, puede atribuirse a la selección de los sujetos de observación o al proceso de aplicación del tratamiento. De este modo, la variabilidad excesiva puede ocurrir a partir del propio proceso de medición, de las condiciones de ensayo en el momento de las observaciones o de la falta de homogeneidad de las unidades experimentales en las que se realizan las mediciones (Mason, Gunst, & Hess, 2003).

Por consiguiente, lo que se busca en este tipo de estudios es reducir, lo máximo posible, la variabilidad entre los ejemplares con el fin de minimizar el error experimental. Montgomery (2013) establece que un método para disminuir ese tipo de error es probar cada uno de los tratamientos en sujetos diferentes; estableciendo así la asignación de los tratamientos a cada uno de los sujetos de forma aleatoria. Dicha aleatoriedad busca asignar los tratamientos y el orden de aplicación al azar. En consecuencia, este tipo de experimentos se denomina diseño completamente aleatorizado (*RCD*). El modelo estadístico tradicional del *RCD* es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad (2-1)$$

donde μ es la media total, τ_i es el efecto del tratamiento i -ésimo, y ε_{ij} es el término del error.

El propósito de los experimentos *RCD* es comparar entre sí varios tratamientos aplicados a una muestra seleccionada aleatoriamente. Por lo tanto, este diseño proporciona una estimación de la varianza del error y conduce a pruebas de hipótesis que validan la posibilidad de detectar diferencias entre las medias de los tratamientos aplicados (Anderson *et al.*, 2017). Sin embargo, dicha variabilidad se puede eliminar si se identifican

los agentes que la inciden y se incorporan al experimento como factores de bloqueo; donde la formación de bloques es similar a la estratificación en el muestreo. Sin embargo, el bloqueo corresponde a otro tipo de diseño; denominado diseño de bloques aleatorizados *RCBD*.

Las ventajas que ofrece *RCBD* es la replicación y la homogeneidad experimental. No obstante, en este tipo de diseños no es posible controlar factores externos que pueden afectar los resultados del experimento. Así pues, la identificación e incorporación son propios de *RCBD*. Wackerly, Mendenhall, y Scheaffer (2008) afirman que un diseño aleatorizado en bloque contiene b bloques y k tratamientos consistentes de b bloques de k unidades experimentales cada uno. Los tratamientos se asignan de manera aleatoria a las unidades de cada bloque, con cada tratamiento apareciendo exactamente una vez en cada bloque. Lo anterior permite controlar mejor la variabilidad de los tratamientos y establecer un análisis de varianza más completo al experimento.

2.3 Análisis de perfiles de medidas repetidas

Dentro de la variedad de métodos utilizados para el análisis de varianza, en el diseño de experimentos, están los que incluyen procedimientos gráficos. Una de las técnicas de comparación es el análisis de perfiles de medidas repetidas (*APMR*). El término "medidas repetidas" se refiere ampliamente a datos en los que la respuesta de cada unidad experimental se observa en múltiples ocasiones o bajo múltiples condiciones (Davis, 2002). Igualmente, a través del *APMR* se pueden realizar confrontaciones entre tratamientos, tanto de forma univariada como de forma multivariada. Sin embargo, el término *uni* hace referencia a varias observaciones de un mismo fenómeno bajo diferentes tratamiento; mientras que el término *multi* se puede relacionar con mediciones apareadas en las que se involucran más de dos variables independientes.

En consecuencia, dicha técnica es una aplicación de análisis univariante de varianza (*ANOVA*) y el análisis multivariante de varianza (*MANOVA*). Lo anterior se debe a que todas las muestras son medidas dentro de una variable fija o constante y es comparada mediante múltiples factores (Johnson & Wichern, 2007). Además, permite la resolución de problemas y toma de decisiones con un enfoque analítico que incluye todas las variables que influyen en el problema a resolver (Gatingon, 2013).

De esta manera, el APMR se enfoca, principalmente, en validar si los vectores de valores medidos son los mismos. Por lo tanto, para establecer dicho planteamiento es necesario evaluar las hipótesis nulas de paralelismo, horizontalidad y coincidencia (ver Figura 2-1). Según Harrar y Kong (2016), las hipótesis nulas de la técnica buscan resolver las siguientes preguntas de investigación: (i) ¿Hay efecto de la interacción entre sujetos dentro de los factores? (ii) ¿Hay un efecto de factor entre sujetos? y (iii) ¿Hay efecto intra-sujetos?

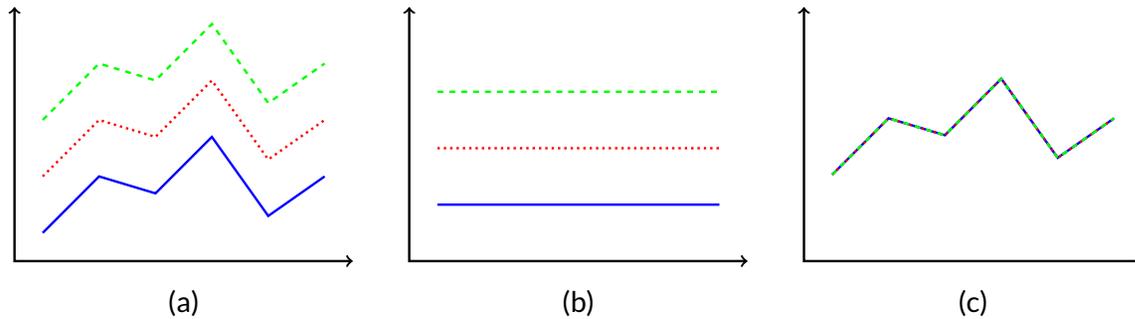


Figura 2-1 Representación gráfica de las hipótesis nulas de perfiles en medidas repetidas: (a) paralelismo; (b) horizontalidad; (c) coincidencia.

Desde el punto de vista matemático se puede comprobar cada una de las hipótesis nulas mediante el cálculo y la solución de las matrices de varianza o covarianza, según sea el caso. De manera que la validación de dichas pruebas se realiza mediante la aplicación de las ecuaciones 1, 2 y 3 (respectivamente).

$$H_{01} : \begin{bmatrix} \mu_{1,1} - \mu_{2,1} \\ \mu_{2,1} - \mu_{3,1} \\ M \\ \mu_{p-1,1} - \mu_{p,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{1,2} - \mu_{2,2} \\ \mu_{2,2} - \mu_{3,2} \\ M \\ \mu_{p-1,2} - \mu_{p,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{1,3} - \mu_{2,3} \\ \mu_{2,3} - \mu_{3,3} \\ M \\ \mu_{p-1,3} - \mu_{p,3} \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

$$H_{02} : \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \\ M \\ \mu_{p-1} - \mu_p \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

$$H_{03} : \mu \sum x_{i,1} = \mu \sum x_{i,2} = \mu \sum x_{i,3} \quad (2-4)$$

Aun así, las comprobaciones de cada una de las hipótesis se encuentran disponibles en rutinas programadas en software estadístico especializado; por ejemplo, **R**. Lo anterior es una consecuencia de la cantidad de información que, en algunos casos, se requiere analizar. Además, mediante dichas rutinas es posible aplicar diferentes teorías que permiten evaluar la varianza y el nivel de significancia que existe en el conjunto de datos. Asimismo, las rutinas permiten evaluar la correspondencia de los datos mediante la comprobación de hipótesis nulas del método.

Por otra parte, Tabachnick y Fidell (2013) mencionan que el conjunto de datos puede provenir de una variable dependiente medida varias veces bajo un mismo patrón; por ejemplo, un tratamiento aplicado a varios sujetos en el que se registra la evolución de los pacientes al mismo tiempo. A partir del ejemplo anterior es posible identificar algunas aplicaciones del *APMR* en la ingeniería geotécnica. Así pues, una de estas puede ser una en la que se reemplace el sujeto por un parámetro físico del suelo y la variable fija por la profundidad en la que ese parámetro se mide durante un estudio de suelos. Otra aplicación de la técnica, puede ser un experimento en el que se evalúe el porcentaje de material que pasa a través de un tamiz, donde la abertura del tamiz es la variable fija.

En consecuencia, esta técnica estadística establece la variabilidad de los datos aportada por los tratamientos en cualquier tipo de diseño de experimentos. Sin embargo, los resultados se deben contextualizar de acuerdo con la disciplina del estudio; debido a que en algunos casos no se requiere de la validación de todas las hipótesis nulas. Por otra parte, los análisis de perfiles de medidas repetidas se pueden validar mediante la aplicación de cuatro diferentes técnicas. Dichas técnicas las menciona Olson (2012) y se describen a continuación:

- **Traza de Pillai:** es un estadístico de valor positivo, cuyos valores crecientes indican los efectos que contribuyen más al modelo. Se dice que es el modelo más poderoso y robusto que existe para estimar la varianza entre datos.
- **Lambda de Wilks:** es un estadístico de valor positivo que va de 0 a 1 y se utiliza para comprobar si existen diferencias entre las medias de grupos de sujetos identificados en una combinación de variables dependientes. Los valores decrecientes de la estadística indican efectos que contribuyen más al modelo. El Lambda de Wilks es

una medida directa de la variación en la combinación de variables dependientes en el que se desconoce el paradero de la variable independiente.

- **Traza de Hotelling:** es un estadístico de valor positivo para el que los valores crecientes indican efectos que contribuyen más al modelo. El criterio de la traza de Hotelling (HTC) se utiliza para encontrar un conjunto de características lineales que separan de manera óptima dos clases de objetos. Por otro lado, es un estadístico basado en la suma de los valores propios de la matriz de prueba.
- **Raíz mayor de Roy:** es el mayor valor propio de la matriz de prueba. Por tanto, es un estadístico de valor positivo en el que los valores crecientes indican efectos que contribuyen más al modelo. El contraste la raíz mayor de Roy es el más indicado cuando las variables dependientes están fuertemente interrelacionadas en una sola dimensión.

Por otra parte, debido al tipo de experimento se evalúan los supuestos de Homogeneidad y Esfericidad. Dichos supuestos se estiman mediante la validación de las siguientes hipótesis nulas, tomando como datos los residuales de los errores.

Homogeneidad:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_k^2 \quad (2-5)$$

Esfericidad:

$$H_0 : \sigma_{ja-jb}^2 = \sigma_{jc-jd}^2; \forall (a, b) \neq (c, d) \quad (2-6)$$

Estas pruebas permiten establecer si las varianzas entre cada par de medias de medidas repetidas son constantes (Balluerka Lasa & Vergara Iraeta, 2002) con el propósito de seguir una distribución F . De esta manera, se busca validar si la variabilidad entre las medias de los datos se repite.

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

La metodología del trabajo es de tipo cuantitativo exploratorio. Debido a que se enfoca en la obtención de datos cuantitativos que, posteriormente, van a ser estudiados mediante el diseño de un experimento completamente aleatorizado y el *APMR*. Los cálculos se realizan en el software estadístico R. Además, se utilizan los paquetes *RCMDR*, propuesto por Fox *et al.* (2017), para estimar varianzas y *PROFILER*, propuesto por Bulut, Christopher, y Desjardins (2017), para ejecutar el *APMR*. Por lo tanto, para alcanzar los objetivos propuestos, la metodología se compone de cuatro fases.

3.1 Fase 1

Selección de las bases granulares. Se toman materiales provenientes de tres diferentes canteras de la Sabana de Bogotá. De esta manera, se establecen los tratamientos del experimento *RCD*. Por motivos de confidencialidad en este trabajo no se especifican las ubicaciones exactas de los sitios de extracción. En consecuencia, a partir de acá en el documento cada material se denominará A, B y C.

3.2 Fase 2

Desarrollo del plan experimental. En esta fase se abarca el trabajo de laboratorio. Por lo tanto, se incluye la ejecución de los ensayos de granulometría por tamizado. Las pruebas siguen el procedimiento establecido en la norma de ensayo INV-E-123 (INVIAS, 2013d). Además, se incluyen los cálculos de las distribuciones de tamaños de partículas.

3.3 Fase 3

Aplicación de la técnicas estadísticas. Aquí se establecen los descriptivos del experimento y realizan los cálculos de varianza de los datos. Así pues, se realizan comparaciones múltiples aplicando el método de *Tuckey*. Asimismo, se evaluará si los datos cumplen con los supuestos de Homogeneidad y Esfericidad de los residuales de los errores. Dichos supuestos se estiman mediante la aplicación de las pruebas de Levine y GGEpsilon.

3.4 Fase 4

Análisis de resultados, conclusiones y recomendaciones. Finalmente, los cálculos de variabilidad del experimento y el *APMR* se contextualizan en la disciplina (Ingeniería Civil). De esta manera, se establece de forma cuantitativa si los materiales cumplen o no con los criterios del (INVIAS, 2013c). Además, se fundamenta estadísticamente si el procedimiento es apropiado para este tipo de estudios o no.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS Y ANÁLISIS

4.1 Resultados experimentales

Se seleccionaron las canteras A, B y C proveedoras de masas granulares de gradación gruesa en la Sabana de Bogotá. De cada uno de los sitios se tomaron tres muestras para medir variabilidad mediante el diseño de un experimento completamente aleatorizado y la técnica *APMR*. Posteriormente, se realizaron ensayos de granulometría mediante el procedimiento de ensayo estandarizado establecido por el INVIAS (2013d) en su norma INV E-123. Los resultados, de distribución de tamaño de partícula para cada tipo de material, se presentan en la Tabla 4-1.

Tamiz	D [mm]	M1-A	M2-A	M3-A	M1-B	M2-B	M3-B	M1-C	M2-C	M3-C
2"	50	100	100	100	100	100	100	100	100	100
1 1/2"	37.5	100	100	100	100	100	100	100	100	100
1"	25	79.9	85.2	75.4	100	100	100	97.7	98.8	97.5
3/4"	19	72.1	77.9	68.4	88.3	93.4	89.4	88.5	89.6	88.7
3/8"	9.5	55.5	57.7	53.9	59.0	59.3	61.3	70.5	72.5	71.6
4	4.75	38.8	39.9	39.0	40.1	37.9	42.5	54.8	54.4	54.8
10	2	26.6	26.9	27.2	27.1	24.1	28.6	36.4	35.1	36.1
20	0.85	18.6	19.8	20.0	19.9	18.1	20.8	28.0	27.1	27.4
40	0.425	14.6	15.3	15.2	15.4	14.3	16.3	23.2	22.8	23.1
60	0.25	11.8	12.5	12.0	10.8	10.7	12.0	16.2	19.2	19.2
140	0.106	2.0	2.4	1.8	1.1	0.9	0.8	1.5	2.6	2.3
200	0.075	0.8	1.0	0.7	0.4	0.3	0.3	0.7	1.2	1.0

Tabla 4-1 Repeticiones de granulometría para la canteras A, B y C

4.2 Experimento

4.2.1 Descriptiva de datos

Las Figuras 4-1, 4-2 y 4-3 presentan la exploración descriptiva de los datos granulometría de los materiales estudiados.

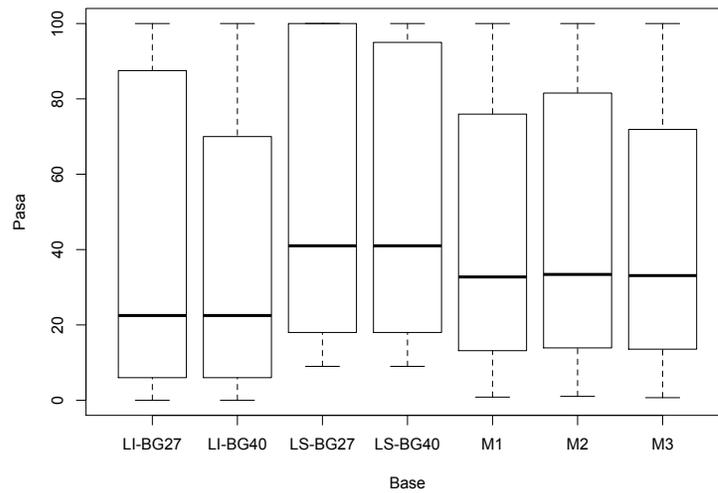


Figura 4-1 Box plot de la distribución de tamaños de partícula en la cantera A

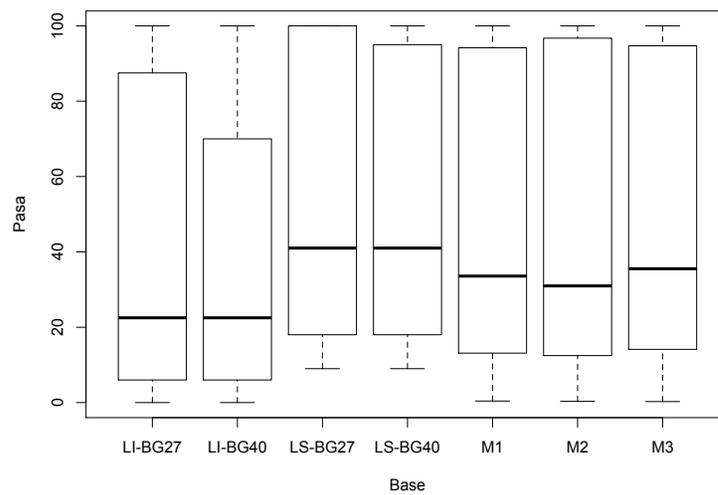


Figura 4-2 Box plot de la distribución de tamaños de partícula en la cantera B

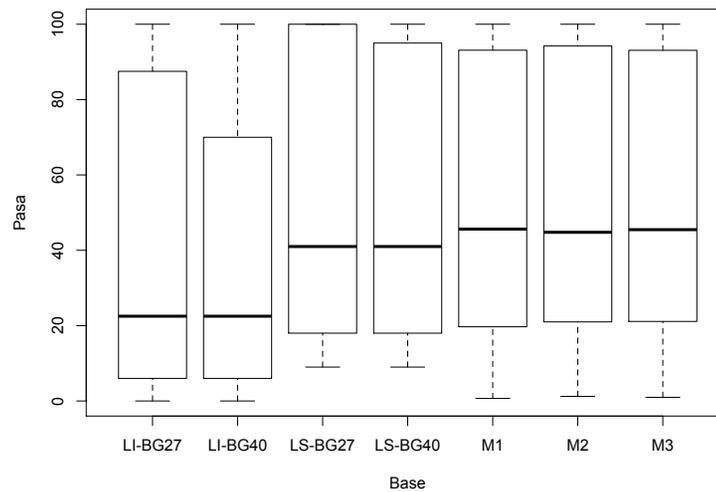


Figura 4-3 Box plot de la distribución de tamaños de partícula en la cantera C

A partir de dichas Figuras se encontró que la granulometría de las muestras es uniforme. Además, los valores de los ensayos de laboratorio no presentan datos atípicos. Por otra parte, se evidencia que la granulometría recolectada está contenida en cada una de las franjas (límites) de la normatividad. Así pues, se establece descriptivamente que no existe diferencia entre las distribuciones de tamaño encontradas experimentalmente y las del Artículo 300 de la especificación INVIAS (2013b).

4.2.2 Análisis de varianza

Se realizó un análisis de varianza (ANOVA). Lo anterior con el fin de evaluar la variabilidad de los datos mediante la validación de las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n \quad (4-1)$$

$$H_a : \mu_i \neq \mu_j \quad (4-2)$$

Se realizó un ANOVA de los datos para cada uno de los materiales de las canteras A, B y C. La Tabla 4-2 presenta los resultados de dicho cálculo.

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	F	p-valor
Base A	6	2317	386.1	0.26	0.95
Residuales	77	112518	1461.3		
Base B	6	2196	366	0.23	0.97
Residuales	77	122500	1591		
Base C	6	2829	471.4	0.31	0.93
Residuales	77	116872	1517.8		

Tabla 4-2 Análisis de varianza para los materiales de estudio

En el análisis de varianzas de medias de un factor se encontró que los datos son válidos bajo un nivel de significancia cercano al 95 % ($\alpha = 0.05$) para los tres materiales. De esta manera, existe suficiente evidencia estadística para no rechazar la prueba de hipótesis nula del ANOVA. Además, mediante este análisis se logró establecer, estadísticamente, que existen diferencias entre los parámetros establecidos en la normatividad con las granulometrías de las canteras A, B, C.

4.2.3 Estimaciones: intervalos de confianza

Se calcularon los intervalos de confianza de los datos utilizando la opción gráfica entre que trae el paquete **Rcdmr**. Dichos intervalos se estimaron bajo un nivel de significancia del 95 %. Las Figuras 4-4, 4-5 y 4-6 muestran los resultados obtenidos.

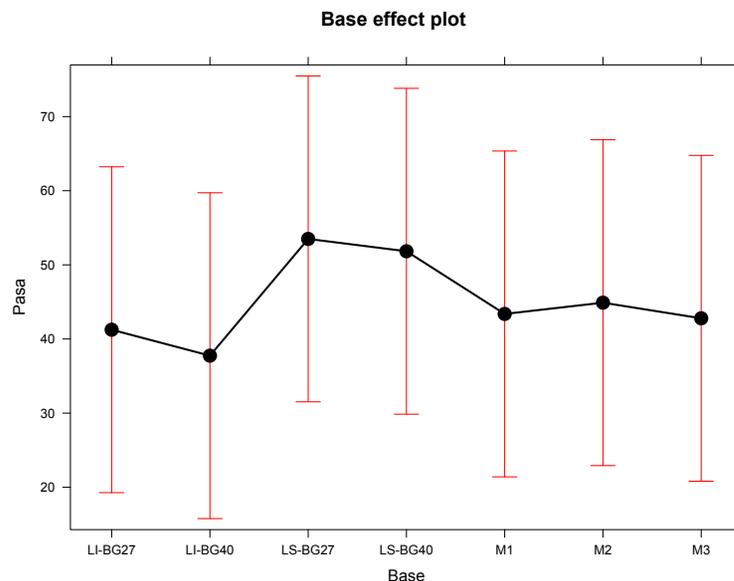


Figura 4-4 Intervalos de confianza para la cantera A

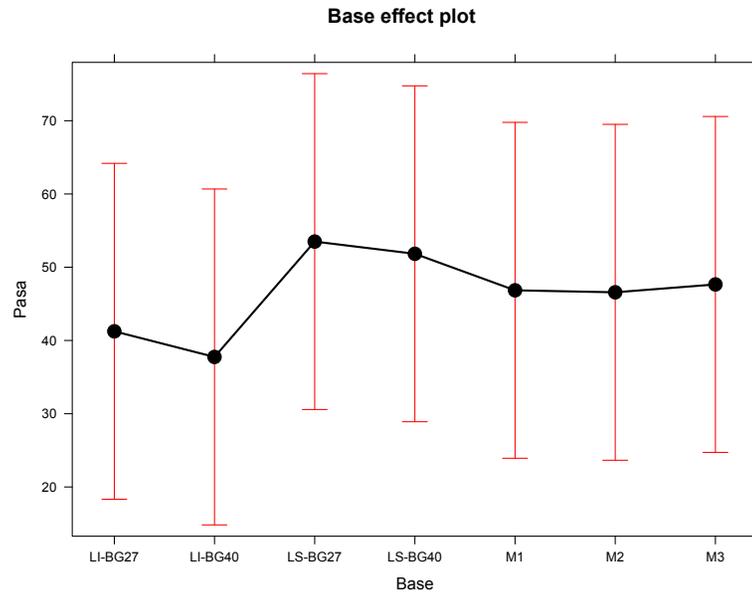


Figura 4-5 Intervalos de confianza para la cantera B

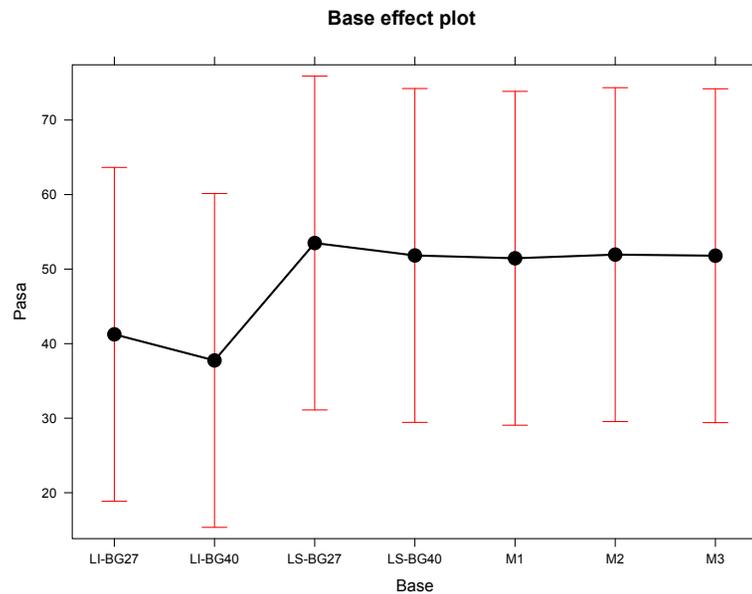


Figura 4-6 Intervalos de confianza para la cantera C

El cálculo de intervalos de confianza estableció que no existe variabilidad entre las muestras analizadas. No obstante, se evidencia que bajo un valor $\alpha = 0.05$ es probable que los materiales cumplan con las franjas de Bases Granulares de Gradación Gruesa. Lo anterior, se debe a que los resultados revelaron que las granulometrías de todas las

muestras, en cada una de las canteras, tienen valores dentro de los límites establecidos para materiales tipo BG-40 y BG-27. Por consiguiente, los intervalos de confianza muestran que las granulometrías de las canteras A, B y C cumplen con los parámetros del Artículo 300 del INVIAS (2013b).

4.2.4 Comparaciones múltiples, método de Tuckey

Se realizó un análisis de comparaciones múltiples utilizando el método de Tuckey. Dicho procedimiento se basó en el cálculo de ANOVA para parejas de datos. Mediante la técnica se aprovecharon los intervalos de confianza de las medias. Asimismo, se calculó la diferencia de medias en cada un pareja y conjunto de repeticiones. De este modo, se compararon todas las mediciones de los tratamientos de manera simultánea a través de confrontaciones uno a uno, entre todas las repeticiones de los tratamientos. Así pues, se validaron las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \mu_{i,n} = \mu_{j,p} \quad (4-3)$$

$$H_a : \mu_{i,n} \neq \mu_{j,p} \quad (4-4)$$

Los resultados muestran que la información se puede agrupar en un solo conjunto de curvas granulométricas. En las Figuras 4-7, 4-8 y 4-9 se presentan los resultados obtenidos de comparaciones múltiples para los ensayos de granulometría de cada material empleando el paquete RCDMR. Pese a la cantidad de información que se obtuvo, en el análisis de comparaciones múltiples las de destacar son aquellas en las que se realizan equiparaciones entre las muestras y las franjas de distribuciones granulométricas. Allí se observa, a partir de los resultados obtenidos mediante la prueba de Tuckey, que no hay variabilidad entre los intervalos de confianza de la media. Por lo tanto, hay suficiente evidencia estadística (desde el enfoque del criterio de comparaciones múltiples) para confirmar que los materiales de las canteras A, B, y C cumplen con los parámetros establecidos en el Artículo 300 del (INVIAS, 2013b).

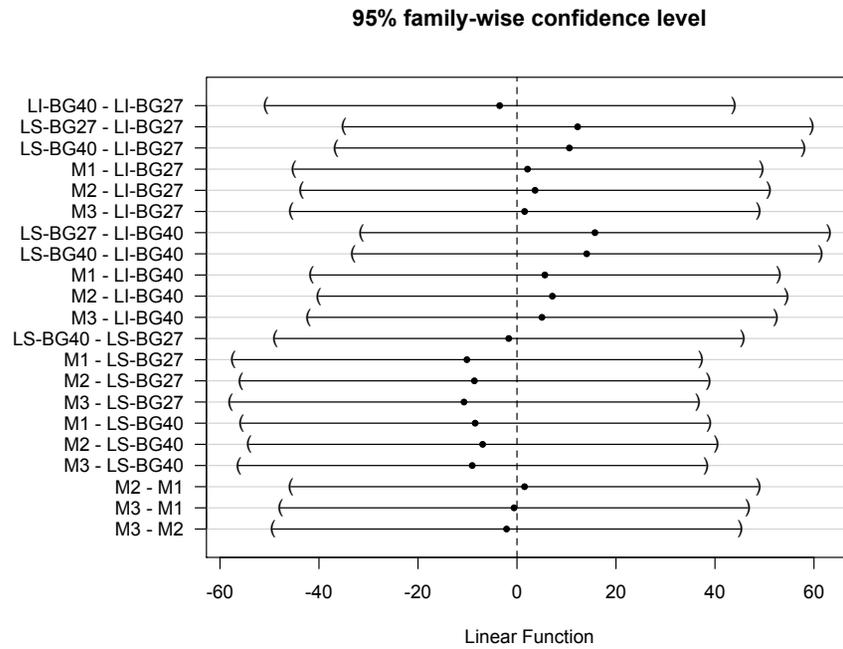


Figura 4-7 Comparaciones múltiples de la cantera A

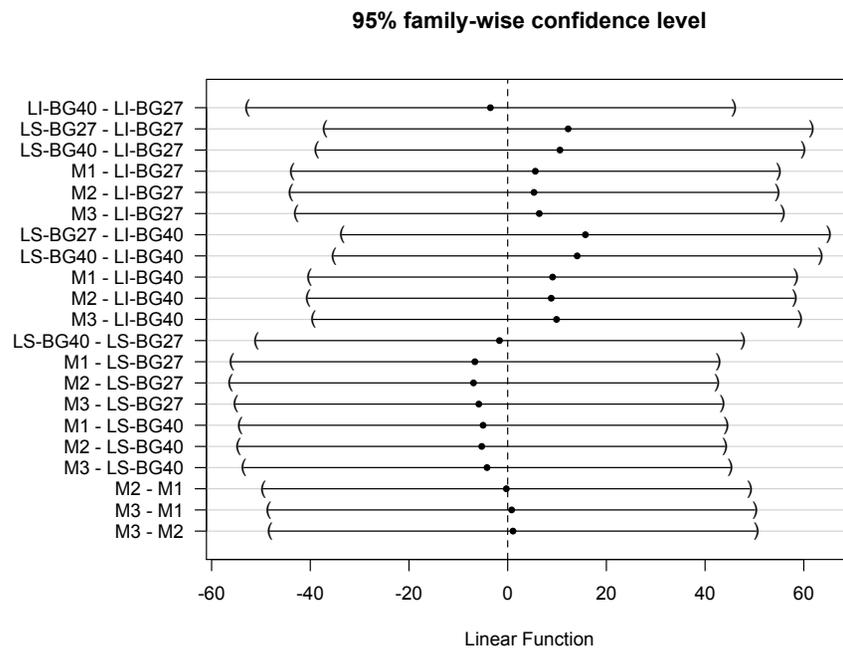


Figura 4-8 Comparaciones múltiples de la cantera B

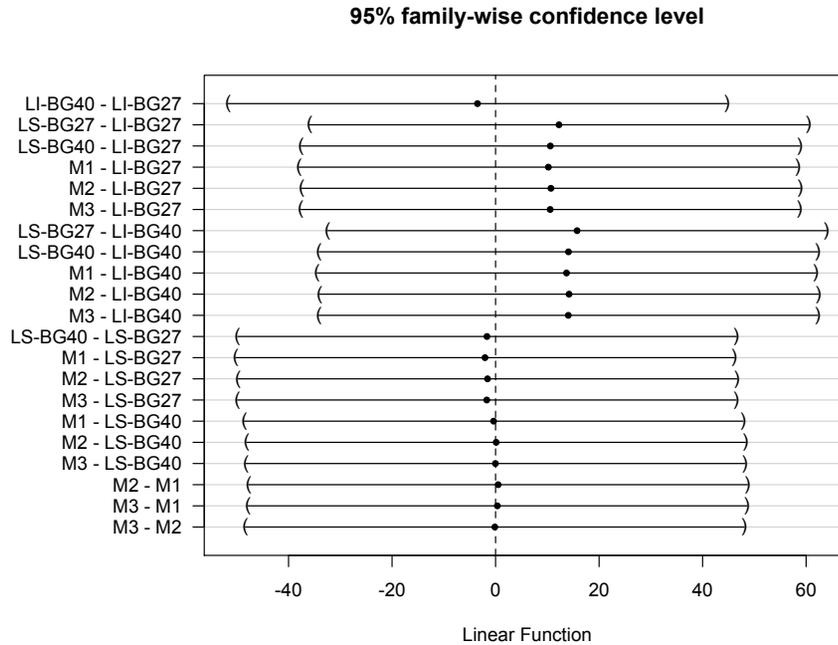


Figura 4-9 Comparaciones múltiples de la cantera C

4.2.5 Homogeneidad de datos

Se realizó la evaluación de homogeneidad de datos; con el propósito de validar si las distribuciones de tamaño de partícula cumplen con los supuestos de un experimento completamente aleatorizado y el APMR. De este modo, se aplicó la prueba de Levine. A través de dicha prueba se buscó establecer si los datos tiene la misma variabilidad por medio las siguientes hipótesis:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2 \quad (4-5)$$

$$H_a : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \quad (4-6)$$

En la Tabla 4-3 se presentan los resultados obtenidos en el análisis de homogeneidad de datos utilizando el método Levene en R COMMANDER. Con base en los mismos se estableció que hay suficiente evidencia estadística para afirmar que los datos ajustados de granulometría, en las canteras A, B y C, son homogéneos.

Grupo	Grados de libertad	F	p-valor
Base A	6	2.4015	0.9352
Base B	6	3.7956	0.9023
Base C	6	2.8484	0.9147

Tabla 4-3 Análisis de homogeneidad para los materiales de estudio

Paralelamente, se establece que los datos del estudio cumplen con el supuesto de homogeneidad, necesario para aplicar el APMR.

4.3 APMR

Se ejecutó un APMR para establecer la variabilidad de las granulometrías de los tres materiales. Se tomó como variable independiente fija el diámetro de partícula y como variable respuesta el porcentaje que pasa cada tamiz. Asimismo, se aprovecharon los datos de los ensayos de laboratorio para compararlos con las franjas granulométricas. Sin embargo, no se validaron todas las hipótesis del método; debido a que las condiciones del caso de estudio únicamente requieren de la corroboración de las condiciones de paralelismo y coincidencia de los perfiles.

Desde una perspectiva gráfica, que corresponde a una descripción cualitativa de los datos, se observó que los materiales granulares de las canteras A y B cumplen con las especificaciones Artículo 300 del INVIAS (2013b); debido a que aparentemente no hay datos más allá de los límites fijados por las franjas. Mientras que las tres muestras de la cantera C tienen tamaños que no están en el rango de la normatividad desde el Tamiz 4 ($D = 4.75 \text{ mm}$) hasta el Tamiz 60 ($D = 0.25 \text{ mm}$). Las Figuras 4-10, 4-11 y 4-12 muestran los perfiles de medidas repetidas de los ensayos de laboratorio y las franjas de granulometrías gruesas del Artículo 300 del INVIAS (2013b).

Por otra parte, la Tabla 4-4 muestra los resultados de la validación de las tres pruebas de hipótesis del APMR. Las comparaciones entre p-valor y nivel de significancia del 95 % ($\alpha = 0.05$) establecen que dichas hipótesis no se rechazan. Además, se comprobó que las granulometrías de las canteras A, B, C son paralelas, coincidentes y horizontales con las franjas de la normatividad de contraste. De este modo, se establece estadísticamente que los materiales cumplen con lo establecido en el Artículo 300 del INVIAS (2013b).

H ₀	Método	F	p-valor
Cantera A			
Paralelismo	Wilks	540.49	$9.22e^{-15}$
Coincidencia	-	167.90	$5.40e^{-11}$
Horizontalidad	-	8945457	$9.13e^{-22}$
Cantera B			
Paralelismo	Wilks	4541.51	$2.47e^{-32}$
Coincidencia	-	2.58	$2.00e^{-16}$
Horizontalidad	-	2685614	$4.80e^{-29}$
Cantera C			
Paralelismo	Wilks	256.82	$6.89e^{-20}$
Coincidencia	-	283.50	$7.13e^{-15}$
Horizontalidad	-	38872.47	$5.19e^{-18}$

Tabla 4-4 Resultados de las pruebas para el APMR

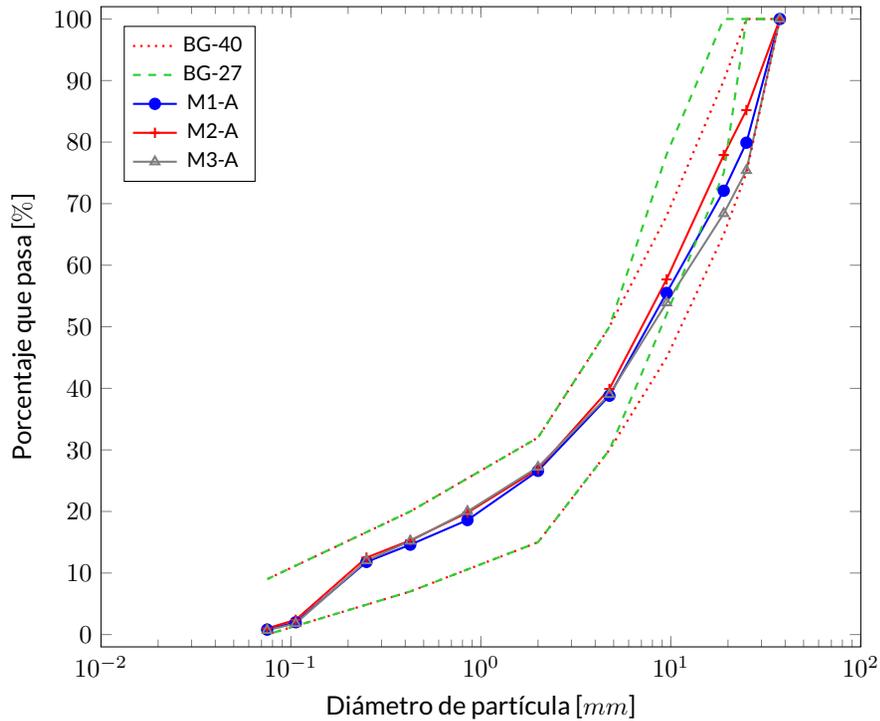


Figura 4-10 Perfiles de la cantera A

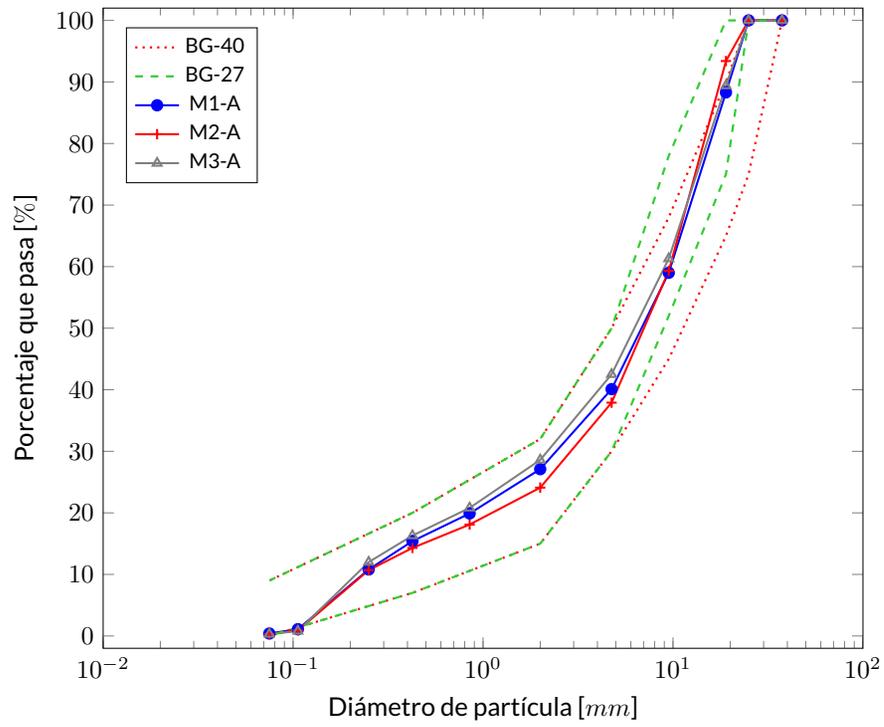


Figura 4-11 Perfiles de la cantera B

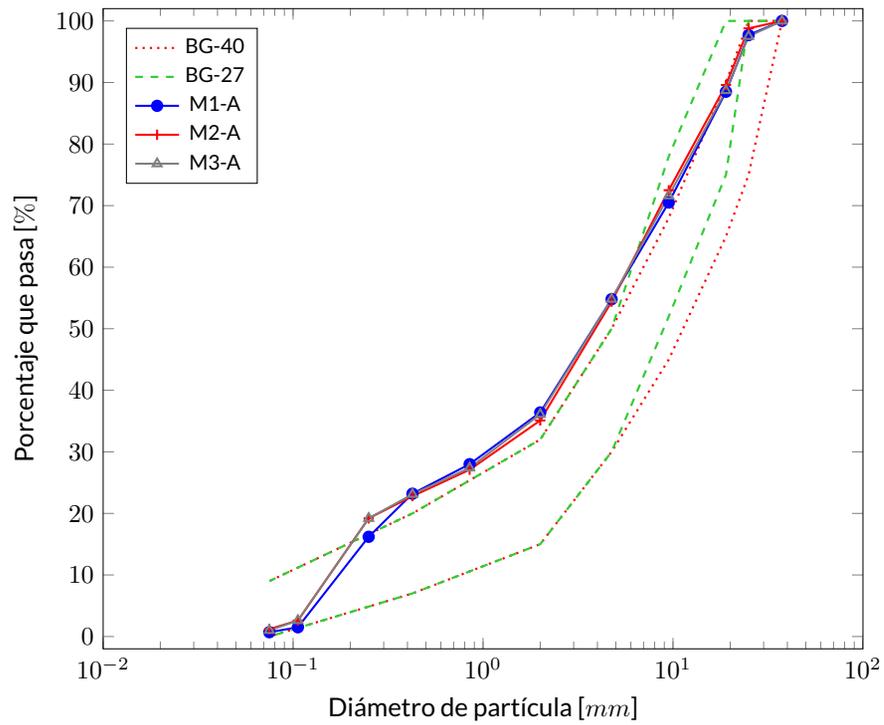


Figura 4-12 Perfiles de la cantera C

CONCLUSIONES

Se realizaron visitas a varios lugares de explotación y venta de agregados pétreos en la Sabana de Bogotá. De esta manera, se seleccionaron las canteras A, B y C, y de dichos sitios se recuperó material granular que está clasificado por sus proveedores como base granular de gradación gruesa.

Las muestras de base granular fueron llevadas al laboratorio de Mecánica de Suelos de la Universidad Militar Nueva Granada. Allí se ejecutaron 9 ensayos de granulometría por tamizado. De esta manera, se midieron tamaños de partículas de los materiales de las canteras A, B y C por medio de muestras tomadas aleatoriamente. Las pruebas se ejecutaron según el procedimiento estandarizado de la Norma INV E -123 (INVIAS, 2013d). Posteriormente, se calcularon los porcentajes de material que pasa cada tamiz y se obtuvieron las curvas granulométricas de los mismos. Los gráficos revelaron, cualitativamente, que las curvas granulométricas de las muestras **M1-A, M2-A, M3-A, M1-B, M2-B** y **M3-B** se encuentran contenidas dentro de las franjas granulométricas del Artículo 330 (INVIAS, 2013c). No obstante, las muestras **M1-C, M2-C** y **M3-C** superan el límite superior de dichas franjas desde el tamaño 9.5 mm hasta el de 0.25 mm .

Se realizaron comparaciones entre los resultados de granulometría, obtenidos experimentalmente, y las franjas de distribución de tamaño de partícula para materiales BG-40 y BG2-7 que están establecidos en el Artículo 300 de las *Especificaciones Generales de Construcción de Carreteras y Normas de Ensayo de Carreteras* (INVIAS, 2013b). Dichos contrastes se desarrollaron a través del diseño de un experimento completamente aleatorizado y el APMR. Los cálculos se desarrollaron con el fin de encontrar la variabilidad entre los materiales de estudio y parámetros de la normatividad.

Así pues, el diseño del experimento incorporó análisis de varianza entre cada uno de los materiales y las franjas reglamentarias, cálculo de intervalos de confianza de las granulometrías, comparaciones múltiples entre los tratamientos y evaluación de homogeneidad de datos. Mientras que en el *APMR* se evaluaron efectos entre entre-sujetos dentro de los factores, efectos de los factores entre sujetos y efectos intra-sujetos; por medio de la validación de las pruebas de hipótesis de paralelismo, horizontalidad y coincidencia. Los cálculos de los *p - valor* de dichas pruebas presentaron que las hipótesis no se rechazan bajo un nivel de significancia que puede extenderse hasta el 99 % ($\alpha = 0.01$).

Se encontró que bajo un nivel significancia del 95 % ($\alpha = 0.05$) la distribución de tamaños de partícula de los materiales de las canteras A, B y C y las franjas granulométricas del Artículo 300 (INVIAS, 2013c) tienen la misma media, se agrupan en el mismo conjunto de intervalos datos, son homogéneos, paralelos, horizontales y coincidentes. Por consiguiente, se estableció estadísticamente que los materiales cumplen con la normatividad colombiana vigente para la construcción de vías.

Se formuló un procedimiento para evaluar el cumplimiento de las especificaciones de materiales para la construcción de carreteras INVIAS (2013c). Dicha metodología incluye el diseño de un experimento completamente aleatorizado en el que se realiza (i) análisis de varianza, (ii) estimación de intervalos de confianza, (iii) comparaciones múltiples dos a dos, (iv) cálculo de homogeneidad de varianzas y (v) el análisis de perfiles de medidas repetidas. Asimismo, por medio de este procedimiento se evalúa, cuantitativamente, el nivel de paralelismo, coincidencia y horizontalidad entre las distribuciones de tamaño de los materiales granulares empleados en la construcción de pavimentos y los parámetros establecidos en la normatividad vigente. En dicho procedimiento se puede utilizar el nivel de significancia α que el investigador considere más apropiado para el estudio. Además, el procedimiento se puede aprovechar para validar la distribución de tamaño de partículas de otras capas de pavimento (como la subbase), mezclas asfálticas u hormigón.

REFERENCIAS

- Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., Camm, J., & Cochran, J. (2017). *Essentials of Statistics for Business and Economics* (8.^a ed.). Boston: Cengage Learning.
- Aponte Hincapie, H. A. (2016). *Comparación de las normas tipo FAA P-401 e IDU MD 20, para la elaboración de mezcla asfáltica* (Monograph, Universidad Militar Nueva Granada). Recuperado desde <http://repository.unimilitar.edu.co/handle/10654/7669>
- Balluerka Lasa, N. & Vergara Iraeta, A. I. (2002). *Diseños de investigación experimental en psicología* (1.^a ed.). Madrid: Prentice Hall.
- Bulut, O., Christopher, M., & Desjardins, D. (2017). Profile Analysis of Multivariate Data in R. R Library. Recuperado desde <https://cran.r-project.org/web/packages/profileR/profileR.pdf>
- Davis, C. S. (2002). *Statistical methods for the analysis of repeated measurements* (2.^a ed.). New York: Springer.
- Fox, J., Bouchet-Valat, M., Andronic, L., Ash, M., Boye, T., Calza, S., ... Ligges, U. (2017). R Commander. R Library. Recuperado desde <https://cran.r-project.org/web/packages/Rcmdr/Rcmdr.pdf>
- Gatingon, H. (2013). *Statistical Analysis of Management Data* (3.^a ed.). New York: Springer Science & Business Media.
- Harrar, S. W. & Kong, X. (2016). High-dimensional multivariate repeated measures analysis with unequal covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 145, 1-21.
- Huang, Y. H. (H. (2004). *Pavement Analysis and Design* (2.^a ed.). Pearson/Prentice Hall.
- INVIAS. (2013a). Artículo 100-13 Ámbito de aplicación, términos y definiciones.
- INVIAS. (2013b). Artículo 300-13 Disposiciones generales para la ejecución de afirmados, sub-bases y bases granulares y estabilizadas.
- INVIAS. (2013c). Artículo 330-13 Bases granulares.

- INVIAS. (2013d). INV E-123-13 Determinación de los tamaños de las partículas de los suelos.
- Johnson, R. A. & Wichern, D. W. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis* (6.ª ed.). New Jersey: Pearson Education International.
- Knappett, J. & Craig, R. (2012). *Craig's Soil Mechanics, Eighth Edition*. Taylor & Francis.
- Kuehl, R. (2000). *Design of experiments: statistical principles of research design and analysis* (2.ª ed.). Duxbury/Thomson Learning.
- Kuhn, M. R. & Bagi, K. (2009). Specimen Size Effect in Discrete Element Simulations of Granular Assemblies. *Journal of Engineering Mechanics*, 135(6), 485-492.
- Mason, R. L., Gunst, R. F., & Hess, J. L. (2003). *Statistical Design and Analysis of Experiments: With Applications to Engineering and Science* (2.ª ed.). New York: Wiley.
- Molina-Gómez, F. A., Camacho-Tauta, J. F., & Reyes-Ortiz, O. J. (2016). Stiffness of a granular base under optimum and saturated water contents. *Revista Tecnura*, 20(49), 75-85.
- Montejo, A. (2002). *Ingeniería de pavimentos. Fundamentos, estudios básicos y diseño. Tomo 1* (2.ª ed.). Bogotá: Universidad Católica de Colombia.
- Montgomery, D. C. (2013). *Design and analysis of experiments*. John Wiley & Sons, Inc.
- Olson, C. L. (2012). Comparative Robustness of Six Tests in Multivariate Analysis of Variance. *Journal of the American Statistical Association*.
- Reyes, F. (2003). *Diseño racional de pavimentos* (1.ª ed.). Bogotá: CEJA- Escuela Colombiana de Ingeniería.
- Rondón, H. & Reyes, F. (2015). *Pavimentos. Materiales, construcción y diseño* (1.ª ed.). Bogotá: Ecoe.
- Tabachnick, B. G. & Fidell, L. S. (2013). *Using multivariate statistics* (6.ª ed.). Prentice Hall.
- Wackerly, D. D., Mendenhall, W., & Scheaffer, R. L. (2008). *Mathematical statistics with applications*. Thomson Brooks/Cole.
- Weibull, W. (1951). A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 293-297.
- Yin, Z.-Y., Hicher, P.-Y., Dano, C., & Jin, Y.-F. (2017, enero). Modeling Mechanical Behavior of Very Coarse Granular Materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 143(1), C4016006.