

**ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN PARA EL INDICADOR DE MORA DE LA  
CARTERA DE CRÉDITO DE CONSUMO EN COLOMBIA EN EL PERIODO  
COMPENDIDO DESDE EL AÑO 2004 AL 2016**



Juan Carlos González Sandoval  
Nataly Lorena Aldana Rodríguez

Fundación Universitaria Los Libertadores  
Programa de Estadística Aplicada  
Bogotá D.C.  
2017

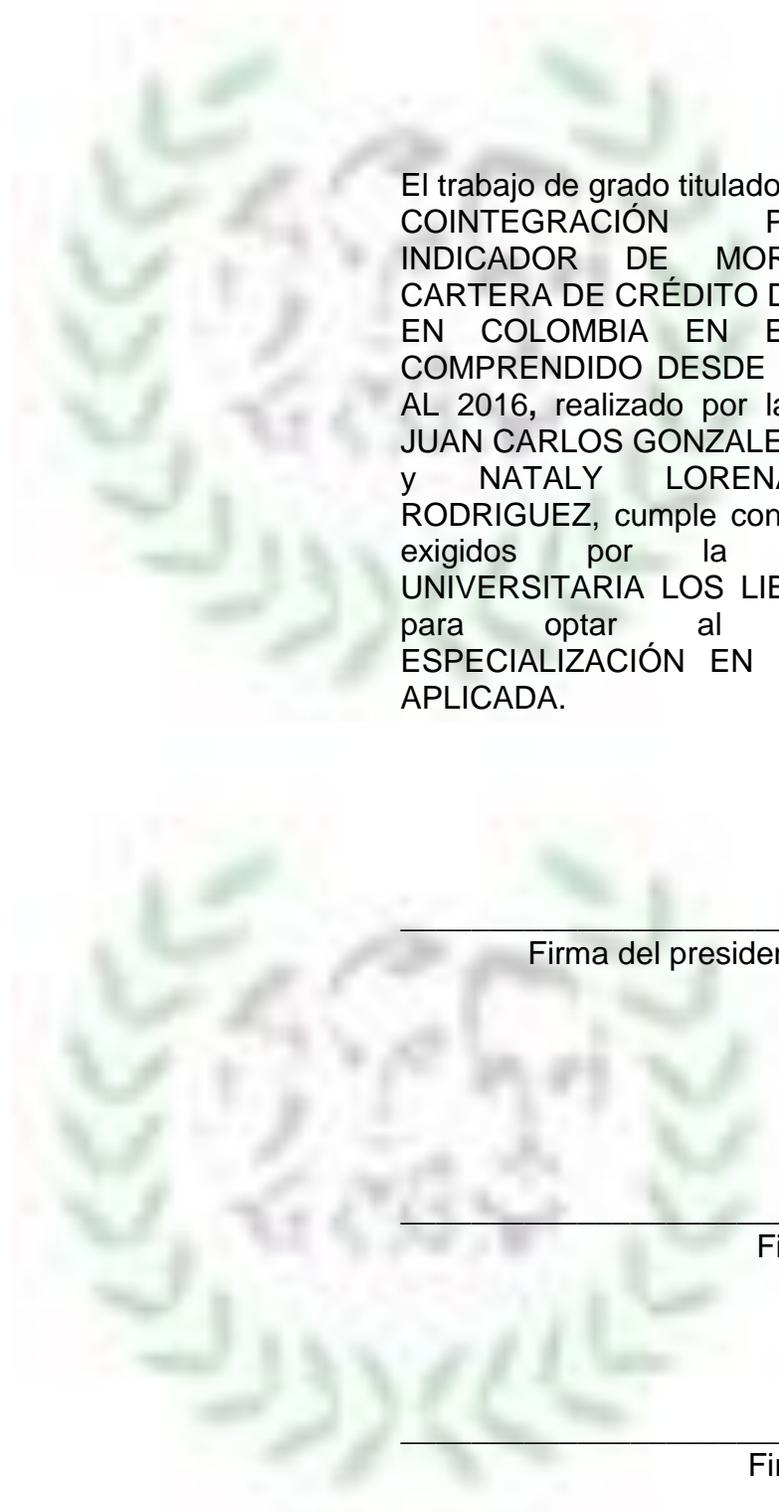
**ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN PARA EL INDICADOR DE MORA DE LA  
CARTERA DE CRÉDITO DE CONSUMO EN COLOMBIA EN EL PERIODO  
COMPRENDIDO DESDE EL AÑO 2004 AL 2016**

Juan Carlos González Sandoval  
Nataly Lorena Aldana Rodríguez

Trabajo de grado para optar por el título de Especialización en estadística aplicada

Fundación Universitaria Los Libertadores  
Programa de Estadística Aplicada  
Bogotá D.C.  
2017

Nota de aceptación



El trabajo de grado titulado ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN PARA EL INDICADOR DE MORA DE LA CARTERA DE CRÉDITO DE CONSUMO EN COLOMBIA EN EL PERIODO COMPRENDIDO DESDE EL AÑO 2004 AL 2016, realizado por las estudiantes JUAN CARLOS GONZALEZ SANDOVAL y NATALY LORENA ALDANA RODRIGUEZ, cumple con los requisitos exigidos por la FUNDACIÓN UNIVERSITARIA LOS LIBERTADORES para optar al título de ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

---

Firma del presidente del jurado

---

Firma del jurado

---

Firma del Jurado

Bogotá D.C., 10 de junio de 2017



Las directivas de la Fundación Universitaria los libertadores, los jurados calificadores y el cuerpo docente no son responsables por los criterios e ideas expuestas en el presente documento. Estos corresponden únicamente a los autores

## CONTENIDO

	<b>pág.</b>
INTRODUCCIÓN	11
OBJETIVOS	12
Objetivo general:	12
Objetivos específicos:	12
JUSTIFICACIÓN	12
1. Marco de Referencia	13
1.1 Datos:	14
1.1.1 Análisis grafico de los datos:	14
2. Marco teórico	16
2.1 Cointegración:	17
2.1.1 Etapa 1:	17
2.1.1.1 Etapa 2:	18
2.2 Estacionaridad y Dickey – Fuller Aumentado:	18
2.2.1 Test Dickey Fuller (DF)	20
2.2.1.1 Test Dickey Fuller aumentada (DFA)	20
2.3 Modelo ARIMAX	21
3. Marco Metodológico	22
3.1 Especificación cointegración	22
3.1.1 Estacionaridad	23
3.2 Contraste de cointegración etapa 2.	25
4. Análisis y Resultados	25
4.1 Especificación modelo de corto plazo.	25
4.1.1 Análisis del error del modelo de corrección de errores	26
4.2 Extensión del modelo de corrección de errores con metodología SARIMAX (6,0,12)	28
(0,0,2) <sub>12</sub> ~ xreg	28
4.2.1 Análisis del error del modelo de corrección de errores	29
4.3 Pronostico	31
5. Conclusiones y recomendaciones	32
Referencias	33
ANEXOS	35

## LISTA DE TABLAS

	<b>pág.</b>
TABLA 1: ESTADÍSTICAS DESCRIPTIVAS DE VARIABLES INCLUIDAS EN EL ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN.	22
TABLA 2: TEST DICKEY FULLER AUMENTADO	23
TABLA 3: TEST DICKEY FULLER AUMENTADO A LAS VARIABLES CON SU PRIMERA DIFERENCIA.	24
TABLA 4: RESULTADO DE MODELO LINEAL DE RELACIÓN DE LARGO PLAZO.	24
TABLA 5: TEST DFA DEL ERROR O RESIDUO DEL MODELO DE RELACIÓN A LARGO PLAZO.	24
TABLA 6: ESTIMADORES DE LA ECUACIÓN DE CORRECCIÓN DE ERROR.	25
TABLA 7: TEST DE AUTOCORRELACIÓN Y NORMALIDAD SOBRE EL ERROR DEL MODELO.	28
TABLA 8: ESTIMADORES EN LA ECUACIÓN DE CORRECCIÓN DE ERROR POR MEDIO DE METODOLOGÍA ARIMAX.	28
TABLA 9: TEST DE AUTOCORRELACIÓN Y NORMALIDAD SOBRE EL ERROR DEL MODELO ARIMAX.	31

## LISTA DE FIGURAS

	<b>PÁG.</b>
FIGURA 1:TASA CORRIENTE BANCARIA. FIGURA 2: CARTERA COMERCIAL.	14
FIGURA 3:ÍNDICE DE CALIDAD DE CARTERA FIGURA 4:POBLACIÓN DESEMPLEADA.	14
FIGURA 5:ÍNDICE DE SEGUIMIENTO A LA ECONOMÍA DESESTACIONALIZADO BASE 2005.	15
FIGURA 6: TASA DE CRECIMIENTO CARTERA COMERCIAL Y SU ÍNDICE DE CALIDAD ANUAL	15
FIGURA 7:TASA DE CRECIMIENTO CARTERA COMERCIAL Y SU ÍNDICE DE CALIDAD MENSUAL	15
FIGURA 8:VARIABLES ANUALIZADAS	16
FIGURA 9:SERIE NO ESTACIONARIA.	19
FIGURA 10: ACF DE SERIE NO ESTACIONARIA. FIGURA 11: PACF DE SERIE NO ESTACIONARIA.	19
FIGURA 12: ACF DE LAS VARIABLES.	23
FIGURA 13:ESTRUCTURA DEL RESIDUO DEL MODELO DE CORRECCIÓN DE ERROR.	26
FIGURA 14: PRUEBAS GRÁFICAS DE NORMALIDAD DE LOS RESIDUOS DEL MODELO DE CORRECCIÓN DE ERROR.	27
FIGURA 15:MODELACIÓN DEL ÍNDICE DE CALIFICACIÓN DE CARTERA ECM.	27
FIGURA 16:ESTRUCTURA DEL RESIDUO DEL MODELO DE CORRECCIÓN DE ERROR EN METODOLOGÍA ARIMAX.	29
FIGURA 17:PRUEBAS GRÁFICAS DE NORMALIDAD DE LOS RESIDUOS DEL MODELO DE CORRECCIÓN DE ERROR CON METODOLOGÍA ARIMAX.	30
FIGURA 18:MODELACIÓN DEL ÍNDICE DE CALIFICACIÓN DE CARTERA SARIMAX (6,0,12) (0,0,2) <sub>12</sub> ~ XREG.	30
FIGURA 19: PRONOSTICO DEL ÍNDICE DE CALIFICACIÓN DE CARTERA.	31

## LISTA DE ECUACIONES

	<b>pág.</b>
ECUACIÓN 1: CÁLCULO DEL INDICADOR DE CALIDAD DE CARTERA.	13
ECUACIÓN 2: ORDEN DE INTEGRACIÓN ENTRE LAS SERIES DE TIEMPO.	17
ECUACIÓN 3: ECUACIÓN DEL ERROR DEL MODELO EXPLICADO POR LA RELACIÓN LINEAL DE LAS SERIES DE TIEMPO.	17
ECUACIÓN 4: EL ERROR DE ESTA RELACIÓN LINEAL DEBE PRESENTAR ESTACIONALIDAD DE ORDEN I(0)	17
ECUACIÓN 5: COMPORTAMIENTO A LARGO PLAZO	18
ECUACIÓN 6: MODELO DE CORRECCIÓN DE ERRORES - COMPORTAMIENTO CORTO PLAZO	18
ECUACIÓN 7: MCA	19
ECUACIÓN 8: $Y_T$ ES UNA CAMINATA ALEATORIA.	20
ECUACIÓN 9: $Y_T$ ES UNA CAMINATA ALEATORIA CON DERIVADA.	20
ECUACIÓN 10: $Y_T$ ES UNA CAMINATA ALEATORIA CON DERIVADA ALREDEDOR DE UNA TENDENCIA DETERMINISTA.	20
ECUACIÓN 11: $Y_T$ ES UNA CAMINATA ALEATORIA CON DERIVADA ALREDEDOR DE UNA TENDENCIA DETERMINISTA Y AUMENTADA CON VALORES REZAGADOS DE $Y_T$ .	20
ECUACIÓN 12: MODELO ARIMAX.	21
ECUACIÓN 13: MODELO LINEAL DE RELACIÓN DE LARGO PLAZO.	24
ECUACIÓN 14: MODELO DEL CORTO PLAZO CON LAS VARIABLES REGRESORAS.	25
ECUACIÓN 15: MODELO SARIMAX PARA EL ÍNDICE DE CALIFICACIÓN DE CARTERA.	28

## LISTA DE ANEXOS

ANEXO 1: SERIES ANUALIZADAS.	35
ANEXO 2: DESCOMPOSICION DE SERIE CARTERA DE CONSUMO.	35

## GLOSARIO

### GLOSARIO ESTADÍSTICO

**Caminata Aleatoria:** Proceso de series de tiempo donde el valor del periodo siguiente se obtiene como el valor de este periodo, más un término de error independiente (o al menos un no correlacionado).

**Cartera de crédito:** Montos total de los préstamos que hacen los intermediarios financieros.

**Calidad de cartera:** Proporción de la cartera vencida sobre la cartera bruta expresada en porcentaje para indicar la morosidad de la misma.

**Cointegración:** Noción de que una combinación lineal de dos series, cada una integrada de orden uno, es integrada de orden cero.

**Datos de series de tiempo:** Datos recolectados a través del tiempo acerca de una o más variables.

**Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO):** Método para estimar los parámetros de un modelo de regresión lineal múltiple. Las estimaciones de mínimos cuadrados ordinarios se obtienen mediante la minimización de la suma de los residuales cuadrados.

**Modelo de Corrección de Errores (ECM):** modelo de series de tiempo en primeras diferencias que también contiene un término de corrección de error, que sirve para que dos series  $I(1)$  regresen al equilibrio del largo plazo.

**Perdida absoluta media de error porcentual (MAPE):** mide el valor medio del error absoluto en término porcentuales al valor real de la variable.

**Perdida absoluta media del error (MAE):** mide el valor medio del error absoluto.

**Predicción:** La estimación de un resultado obtenido al insertar valores específicos de las variables explicativas en un modelo estimado, que suele ser un modelo de regresión múltiple.

**Procesos estocásticos:** es una secuencia de una variable aleatoria ordenada y equidistantes cronológicamente, referida en un proceso univariante o multivariado siendo estas características de una unidad observable en diferentes momentos del tiempo.

Prueba de Dickey-Fuller (DF): Prueba t de la hipótesis nula de raíz unitaria en un modelo AR (1).

Prueba de Dickey- Fuller aumentada: Prueba para una raíz unitaria que incluye los cambios rezagados de la variable como regresoras.

Prueba de Engle- Granger: Prueba de la hipótesis nula de que dos series de tiempo no están cointegradas; el estadístico se obtiene como el estadístico de Dickey-Fuller usando los residuales de MCO.

Residual: Diferencia entre el valor real y el valor ajustado (o predicho); existe un residual para cada observación en la muestra, y se usa para obtener una línea de regresión de MCO.

## **Resumen**

En este trabajo se quiere probar la existencia de cointegración entre la cartera de crédito de consumo y las covariables desempleo, TCB (Tasa Corriente Bancaria), índice de calidad de cartera y el ISE mensual. Para este fin se plantea un análisis de cointegración, estableciendo un grado de integración  $I(d)$  en sus dos etapas i) Estimación de los coeficientes de la ecuación a largo plazo ii) Modelamiento de las dinámicas al corto plazo obteniendo un modelo ARIMAX para el pronóstico.

**Palabras clave:** Cointegración, ARIMAX, economía, PIB, desempleo, TCB (Tasa Corriente Bancaria), cartera, crédito de consumo, índice de calidad de cartera.

## **Abstract**

In this paper we want to prove the existence of cointegration between the consumer credit portfolio and the covariables unemployment, TCB (Banking Current Rate), the portfolio quality index and the monthly GDP. For this purpose a cointegration analysis is proposed, establishing a degree of integration  $I(d)$  in its stages i) Estimation of the coefficients of the equation in the long term ii) Modulation of the dynamics in the short term obtaining an ARIMAX model for the prognosis.

**Key words:** Cointegration, ARIMAX, economy, GDP, unemployment, TCB (Banking Current Rate), portfolio, consumer credit, portfolio quality index

## INTRODUCCIÓN

El comportamiento de la cartera vencida para el crédito de consumo, ha presentado un crecimiento en el segundo semestre de 2016, ligado a una desaceleración económica, producto de choques externos como la caída del precio de petróleo y el alza del dólar. Estas dinámicas sugieren la existencia de una relación directa o indirecta entre estos comportamientos en el tiempo.

La relevancia del seguimiento de los indicadores de riesgo en el tiempo, permite entender que pasa cuando se han presentado choques económicos en el pasado, encontrando posibles relaciones que proporcionan información para prevenir una alta exposición a los riesgos crediticios, frente a la posibilidad del impago, identificando la relación a largo plazo entre los agregados económicos y la cartera vencida.

En la literatura<sup>1</sup> se observa el análisis de los efectos de los ciclos económicos de expansión y contracción de la economía y el comportamiento del impago y la morosidad, donde haya evidencia de una relación directa e influyente en los saldos de cartera vencida; estos análisis son basados en el comportamiento del PIB trimestral. En este trabajo se considera recoger, los efectos mensuales de los ciclos económicos por medio del índice de seguimiento a la economía y obtener esta relación mensual teniendo en cuenta que es más beneficioso la anticipación de mora de un mes que de 90 días.

El análisis de esta relación a largo plazo se comprueba al tener presencia de cointegración, en una relación lineal entre la cartera vencida y sus posibles covariables; lo anterior aplicando la técnica de cointegración de EANGLE – GRANGER, permitiendo en la primera etapa estimar los coeficientes de la relación lineal a largo plazo y en la segunda etapa modelar las dinámicas al corto plazo. Es así como se busca encontrar una dinámica entre la actividad económica y los ciclos de los créditos.

El objetivo principal de esta investigación es analizar la existencia de cointegración entre el indicador de saldos vencidos del crédito y las dinámicas de crecimiento de las carteras de consumo, los ciclos económicos, precios de mercado de crédito y el desempleo para estimar los efectos de estas covariables sobre el comportamiento del indicador y por medio de un modelamiento ARIMAX que permita pronosticar el índice de cartera vencida, basado en las regresoras rezagadas.

---

<sup>1</sup> Informe Calidad de la cartera y ciclo económico: algunos hechos estilizados en Colombia, BBVA Research; Reporte de estabilidad financiera, Evaluación del Riesgo de Crédito en el Sistema Financiero Colombiano Banco de la Republica de Colombia. El crecimiento del crédito y su impacto sobre la cartera Vencida: una relación directa y rezagada, Apuntes del Supervisor, Superintendencia Financiera de Colombia.

## OBJETIVOS

### OBJETIVO GENERAL:

Analizar la relación a largo plazo entre el índice de cartera vencida, la cartera de crédito consumo, las tasas de interés (TCB), el comportamiento de la economía colombiana y el desempleo.

### OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Estimar los efectos de cambios en la actividad económica, la tasa de interés, el desempleo, la cartera de crédito de consumo sobre el índice de cartera vencida.
- Modelar el indicador de cartera vencida por medio de las covariables desempleo, tasa de interés, actividad económica y cartera de crédito de consumo.
- Pronosticar el índice de cartera vencida en el crédito de consumo.

## JUSTIFICACIÓN

La dinámica expansionista del crédito en Colombia presentada por una mayor cobertura de este servicio a nivel nacional y las facilidades en la obtención de crédito, esto, debido a la flexibilización de los criterios de aceptación de clientes en cuanto a características socioeconómicas principalmente en los ingresos. Obligan a realizar seguimiento a comportamientos de deterioro de cartera. Buscando la minimización de la exposición del riesgo de no pago por efecto del contexto económico de las familias, principales clientes del crédito de consumo.

El análisis de los riesgos de crédito en la actualidad es un tema de interés de estudio en el sector financiero, debido a las potenciales pérdidas que se presenta al tener una exposición alta al riesgo de no pago. Esto nos lleva a cuestionar ¿si los choques en el comportamiento de la economía, los efectos de niveles altos de desempleo y precios altos del mercado de crédito<sup>2</sup> permiten obtener información del comportamiento en la cartera vencida? y poder pronosticar posibles escenarios de un crecimiento de la mora y poder tomar precauciones ante esta exposición de no pago.

---

<sup>2</sup> Tasas de interés. En los últimos años el control de la inflación ha impulsado al Banco de la Republica a elevar la tasa interbancaria afectando a las demás tasas del mercado

## 1. MARCO DE REFERENCIA

El índice de calidad de cartera permite conocer el porcentaje del saldo de la cartera bruta que se encuentra vencida por cada modalidad de crédito de consumo; se calcula tomando el saldo de la cartera vencida sobre el saldo de la cartera bruta total.

$$ICC = \frac{\text{Saldo cartera en mora mayor a 30 días}}{\text{Saldo de la cartera bruta}}$$

Ecuación 1: cálculo del indicador de calidad de cartera.

Un índice alto da una mala calificación a la cartera incrementando los saldos de las provisiones y alertando sobre posible cartera que no se pueda recuperar y se tenga que castigar afectando la utilidad de las entidades de crédito.

De acuerdo a la investigación realizada por Gutiérrez y Vásquez (2008), encuentran la existencia de alta sensibilidad en los indicadores de mora frente a los choques macroeconómicos adversos, por ejemplo, los cambios en la tasa de desempleo tienen un impacto positivo en las provisiones y negativo en los ingresos del sistema financiero, este análisis fue realizado a través de la metodología VEC ante los cambios estructurales.

El trabajo realizado por Amaya (2005) concluye que la desaceleración en la actividad económica y las altas tasa de interés impulsan el crecimiento de la cartera vencida justificado por la percepción de menores ingresos y una alta carga financiera en los hogares.

Romero (2015) determino que existe una asimetría de información en el mercado de crédito en consecuencia, encuentra una relación entre la dinámica económica y los niveles de cartera vencida; los resultados de la investigación evidencian que el impacto del crecimiento del PIB tiene un mayor efecto sobre los indicadores de calidad de cartera, estos resultados proyectan una posibilidad de deterioro moderado en el futuro de la cartera de crédito de consumo.

En la investigación de Malagón (2011) se evidencia que existe una estrecha relación positiva entre el crecimiento del saldo de la cartera de crédito de consumo y su deterioro, dependiendo de las particularidades de cada modalidad de crédito. Recomienda estándares altos para el otorgamiento de créditos de consumo y la recuperación de estos, debido a las dinámicas de los saldos de las carteras. Adicional se evidencia que el deterioro de la cartera de consumo puede ser más rápida que la cartera de crédito comercial por su comportamiento dinámico.

## 1.1 DATOS:

Los datos utilizados en esta investigación fueron extraídos del DANE, Banco de la República y la Superintendencia Financiera de Colombia, comprendiendo los periodos mensuales entre octubre de 2002 a febrero de 2017.

Como indicador de actividad económica se tomó el crecimiento del ISE<sup>3</sup> mensualmente, los precios del mercado fueron tomados por medios de la tasa de interés corriente bancaria aplicadas para la modalidad de crédito de consumo y la tasa de desempleo para observar los efectos en el no pago de obligaciones financieras.

### 1.1.1 Análisis grafico de los datos:

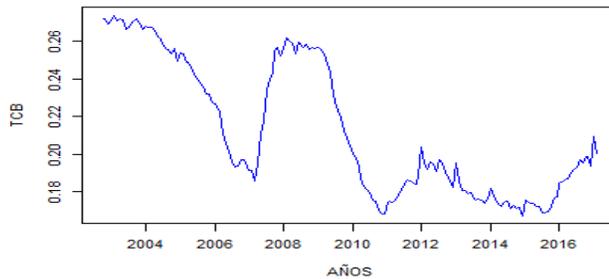


Figura 1: Tasa corriente bancaria.

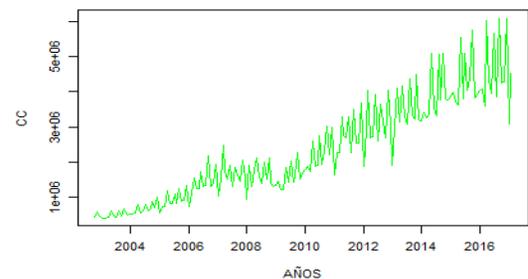


Figura 2: Cartera comercial.



Figura 3: Índice de calidad de cartera

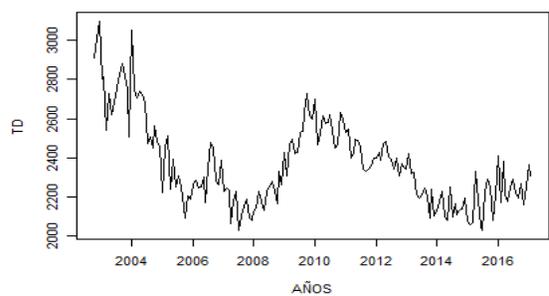
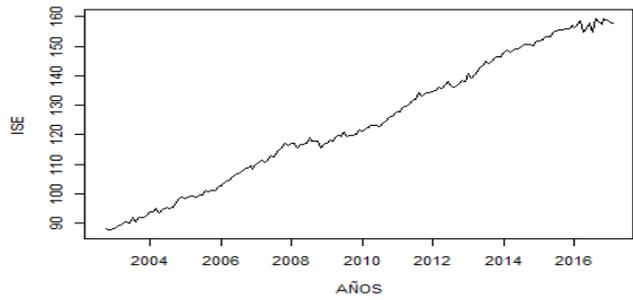


Figura 4: Población desempleada.

<sup>3</sup> Indicador de seguimiento a la economía de Colombia.



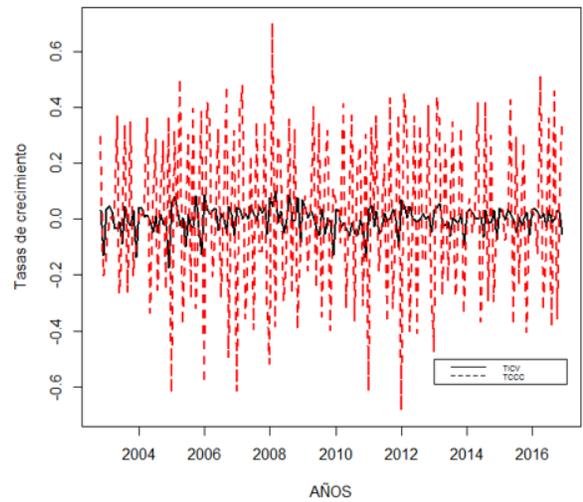
*Figura 5: Índice de seguimiento a la economía desestacionalizado base 2005.*

Fuente: Elaboración propia datos tomados del DANE, Banco de la república y Superintendencia financiera.

La tasa corriente bancaria alcanzó su máximo en año 2003 después de este año ha tenido una tendencia hacia la baja repuntando en el último año como se observa en la figura 1. La cartera comercial tiene una tendencia positiva su nivel más alto se presentó en septiembre del 2016 pero en los últimos meses ha bajado su ritmo de crecimiento. El índice de calificación de cartera presentó su pico más alto en mayo del 2009 en este año se presentó el deterioro más alto de la cartera comercial como se refleja en la figura 3. En los periodos donde el volumen de la población aumenta al mismo tiempo la cartera en mora aumenta como se ve en el 2010 donde presento un pico alto el desempleo.



*Figura 6: Tasa de crecimiento cartera comercial y su índice de calidad anual*



*Figura 7: Tasa de crecimiento cartera comercial y su índice de calidad mensual*

Fuente: Elaboración propia datos tomados del DANE, Banco de la república y Superintendencia financiera.

El análisis temporal de la variación anual, logra describir una posible relación inversa del crecimiento de la cartera y el índice de calificación de estado de mora; si se analiza por año la relación inversa, se ve claramente, (figura 6) que un análisis de la variación mensual no permite describir esta relación, por lo cual se pretende en este trabajo, analizar la variación anual con periodicidad mensual y encontrar la relación que posiblemente existe entre estas dos variables.

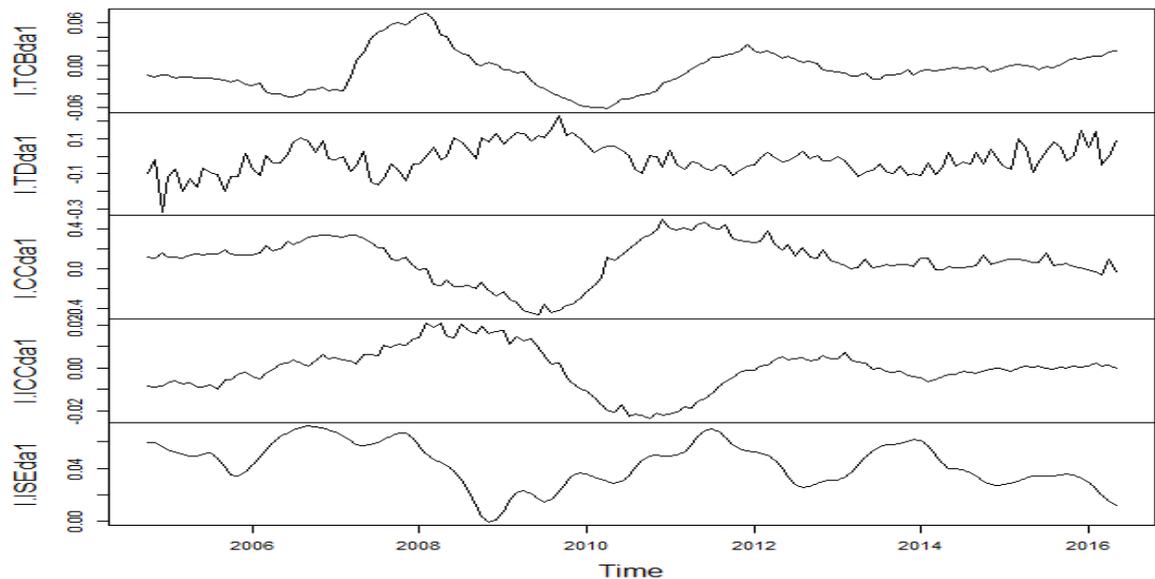


Figura 8: Variables anualizadas

Fuente: Elaboración propia datos tomados del DANE, Banco de la república y Superintendencia financiera.

En la figura 8, observamos como los comportamientos de las variables como los precios del mercado altos afectan el índice hacia el alza, una caída de la actividad económica también impulsa el índice, pero un crecimiento de saldo de la cartera de crédito de consumo reduce el índice como se ve en el periodo del 2008 al 2012. Evidenciando que posiblemente se pueden asociar estos comportamientos de largo plazo a el índice de calificación de cartera.

## 2. MARCO TEÓRICO

Se considera la técnica de cointegración Engle- Granger para analizar las estructuras que se presentan en el largo plazo y que logran influir en el corto plazo; los estudios de series de tiempo son basados en el análisis temporal de una variable, con el método de cointegración se pueden recoger los efectos de variables exógenas sobre esta.

## 2.1 COINTEGRACIÓN:

Es una metodología que toma dos series de tiempo no estacionarias de orden I (1) y comprueba si la combinación lineal entre ellas es estacionaria. El procedimiento de Engel- Granger (1987) se aplica para modelos de dos o más variables y asumen que solo existe un vector de cointegración en el modelo. Ellos utilizan dos etapas basada en los residuos estimados.

### 2.1.1 Etapa 1:

Esta etapa determina el orden de integración entre las series temporales que serán incluidas en el modelo; se estima la ecuación de equilibrio de largo plazo para obtener los coeficientes de la ecuación.

$$[X_t], [Y_t] \sim I(1)$$

*Ecuación 2: Orden de integración entre las series de tiempo.*

Donde:

$X_t$ : es la serie de datos de la variable regresora o covariable en el tiempo

$Y_t$  es la serie de datos de la variable explicada o de interés en el tiempo

I() indica el orden de diferenciación.

Las series de tiempo de las que se quiere probar cointegración deben ser de orden I (1)

$$e_t = Y_t - \delta_0 - \delta_1 X_t$$

*Ecuación 3: Ecuación del error del modelo explicado por la relación lineal de las series de tiempo.*

$$[e_t] \sim I[0]$$

*Ecuación 4: El error de esta relación lineal debe presentar estacionalidad de orden I(0)*

Engle y Granger (1987) concluyeron que si el error de esta ecuación de largo plazo presentaba raíz unitaria no era estacionaria por lo tanto se concluía que era de orden I( $\geq 1$ ) y no presentaba cointegración entre las series de tiempo analizadas y la aplicación del MCO (mínimos cuadrados ordinarios) produciría resultados Espuria<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> Resultados Espuria se presentan cuando hay  $R^2$ ,  $F_c$  y  $T_t$  altos, y  $DW_c$  bajo.

### 2.1.1.1 Etapa 2:

Esta etapa estima el modelo a corto plazo, utilizando el mecanismo de corrección de errores propuesto por Engle y Granger en 1987, donde se pretende enlazar el comportamiento a corto plazo de las variables con el comportamiento a largo plazo de las mismas

$$Y_t = \delta_0 + \delta_1 X_t + e_t$$
$$e_t = Y_t - \delta_0 - \delta_1 X_t$$

*Ecuación 5: Comportamiento a largo plazo*

$$\Delta \log(Y_t) = \phi_0 + \phi_1 \Delta \log(Y_{t-1}) \dots + \alpha + \widehat{e_{t-1}} + \theta_1 \Delta \log(X_{t-1}) + v_t$$

*Ecuación 6: Modelo de corrección de errores - Comportamiento corto plazo*

Dado que las variables X y Y, siendo Y la variable explicada y X la variable regresora presentan cointegración entre ellas, probado en la etapa 1, implicando esto una relación estable a largo plazo entre ellas, aun así, en el corto plazo puede haber desequilibrios.

El término de error  $e_t$  en el modelo de corrección de errores es el que ata el comportamiento de largo plazo al comportamiento de corto plazo de la variable explicada Y.

## 2.2 ESTACIONARIDAD Y DICKEY – FULLER AUMENTADO:

Achuelo (1993) describe que la estacionaridad se caracteriza por que la serie de datos temporales presenta una media constante en el tiempo y homocedasticidad en su varianza. Esto se refiere a que los datos van a variar alrededor de una sola media durante el periodo de tiempo analizado.

En contraste un escenario contrario sería que los datos cambiaran de media en el tiempo mostrando una tendencia estocástica que influye en la serie de datos como lo muestra la figura 7.

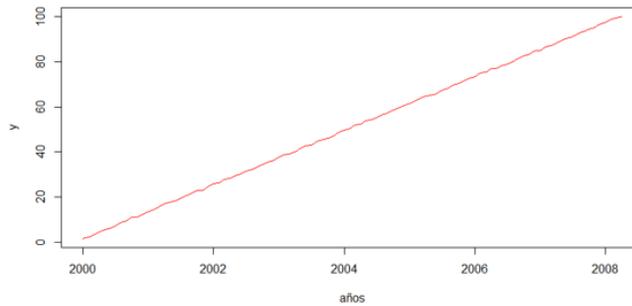


Figura 9: Serie no estacionaria.

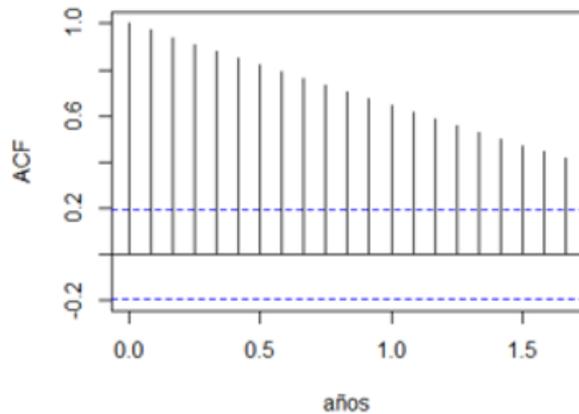


Figura 10: ACF de serie no estacionaria.

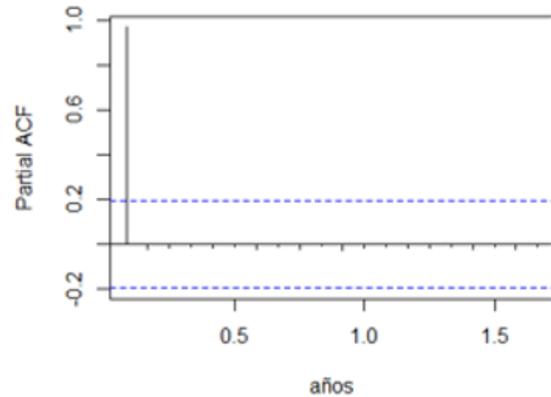


Figura 11: PACF de serie no estacionaria.

Fuente: Elaboración propia simulación de caminata aleatoria.

Al analizar los autocorrelogramas de una serie no estacionaria se puede notar una leve caída en la gráfica ACF y un solo corte en el PACF este análisis visual es además respaldado con la identificación de si la serie presenta raíz unitaria.

Raíz unitaria

Se tiene un modelo de caminata aleatoria;

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t \quad -1 \leq \rho \leq 1$$

Ecuación 7: MCA

Como lo explica Gujarati (2011) si  $\rho = 1$  el modelo se convierte en un MCA sin derivada. Si se tiene  $(1-L)Y_{t-1} = 0$ , L como operador de rezago, cuando la raíz del polinomio en el operador de rezago es  $L=1$  se le llama raíz unitaria. Este problema se refiere a que la varianza de  $Y_t$  es no estacionaria.

### 2.2.1 Test Dickey Fuller (DF)

El test asume que la serie se aproxima a un proceso AR (1) con tres escenarios;

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

*Ecuación 8:  $Y_t$  es una caminata aleatoria.*

$$\Delta Y_t = \delta_1 + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

*Ecuación 9:  $Y_t$  es una caminata aleatoria con derivada.*

$$\Delta Y_t = \delta_1 + \delta_2 t + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde  $t$  es la variable tiempo o de tendencia.

*Ecuación 10:  $Y_t$  es una caminata aleatoria con derivada alrededor de una tendencia determinista.*

Para los tres escenarios la hipótesis nula es  $H_0: \rho = 0$  es decir existe una raíz unitaria y por lo tanto es no estacionaria y respectivamente la alternativa  $H_a: \rho < 0$ . Es decir, no tiene raíz unitaria y es estacionaria la serie. El estadístico de prueba es definido como tau ( $\tau$ ) de tal forma que el criterio de rechazo es  $\tau^* < \tau_{0.05}$  cuando  $\tau^*$  es el calculado.

#### 2.2.1.1 Test Dickey Fuller aumentada (DFA)

El test se basa en realizar la prueba cuando el termino de error esta correlacionado. Esto implica aumentar las tres ecuaciones anteriores adicionando valores rezagados de la variable dependiente  $\Delta Y_t$ ; Obteniendo la siguiente ecuación.

$$\Delta Y_t = \delta_1 + \delta_2 t + \rho Y_{t-1} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

*Ecuación 11:  $Y_t$  es una caminata aleatoria con derivada alrededor de una tendencia determinista y aumentada con valores rezagados de  $Y_t$ .*

En este caso  $\varepsilon_t$  siendo el termino de error cumpliría todos los criterios para ser ruido blando y los valores rezagados que se adicionan serian  $\Delta Y_{t-1} = (Y_{t-1} - Y_{t-2})$ ,  $\Delta Y_{t-2} = (Y_{t-2} - Y_{t-3})$ , etc. La cantidad de rezagos que se incluyen se determina de manera empírica con el objetivo de incluir los rezagos suficientes para que el error no este serialmete relacionado y sea posible obtener una estimación insesgada del parámetro  $\rho$ .

## 2.3 MODELO ARIMAX

Como lo describe Avellaneda (2012) este modelo es construido de 3 estructuras que puede presentar la serie de tiempo y se amplía utilizando variables regresoras o exógenas, procesos que permiten modelar la serie y llegar a un pronóstico de esta.

### Proceso autorregresivo (AR)

La primera parte está definida por un proceso estocástico autorregresivo donde el valor de  $Y_t$  depende directamente de su valor anterior en el tiempo  $Y_{t-1}$  y de un término aleatorio  $\varepsilon_t$  que debe cumplir con las cualidades de ruido blanco, llevando a expresar su pronóstico alrededor de la media de periodos pasados.

### Proceso de medias móviles (MA)

$$Y_t = \mu + \theta_0\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_n\varepsilon_{t-n}$$

Donde  $\mu$  es una constante y  $\varepsilon_t$  es el error estocástico con cualidades de ruido blanco. En este caso  $Y_t$  depende de una constante más un promedio móvil de los choques o términos de error en periodos pasados.

### Procesos estocásticos integrados I

En este caso el proceso busca encontrar en qué orden la serie es estacionaria. Y esto se prueba si la serie presenta raíz unitaria o no y el nivel de diferenciación es el que entrega el orden de integración de la serie. Si la serie es estacionaria con una diferencia esto indica que la serie sigue un proceso estocástico integrado de orden 1.

A estos 3 procesos que caracterizan a una serie de tiempo se les puede ampliar agregando variables regresoras o exógenas (X) en las cuales se intente encontrar alguna posible relación lineal.

Obteniendo el modelo ARIMAX (P, D, Q, X):

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + Y_{t-n} + \theta_0\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_n\varepsilon_{t-n} + \beta_1X_{t-1} + \beta_2X_{t-2} + \dots + \beta_mX_{t-m} + u_t$$

*Ecuación 12: Modelo ARIMAX.*

### 3. MARCO METODOLÓGICO

#### 3.1 ESPECIFICACIÓN COINTEGRACIÓN

Con el fin de estimar si existe algún grado de Cointegración, se prueba la relación lineal entre el indicador de calificación de cartera y las variables macroeconómicas que tienen carácter exógeno, a lo cual se procede a validar Cointegración por medio de la técnica propuesta por Engel- Granger (1987).

Las variables regresoras que se consideraron para incluir en el modelo son presentadas en la tabla 1 con sus respectivas estadísticas descriptivas.

*Tabla 1: Estadísticas descriptivas de variables incluidas en el análisis de cointegración.*

Descriptivos	TCB	CARTERA.CONSUMO	INDICADOR.DE.CALIDAD.DE.CARTERA	TASA.DESEMPLEO	ISE
nobs	173	173	173	173	173
Minimum	0,167321	406370,128690	0,039198	2028,932868	87,630000
Maximum	0,273720	6085712,029260	0,083590	3098,444417	159,530000
Mean	0,212707	2325941,263804	0,053836	2369,091232	123,959769
Median	0,197046	1920083,657120	0,049834	2328,378553	121,150000
Stdev	0,035745	1431813,181663	0,009995	219,537944	21,856803

Fuente: Elaboración propia datos tomados del DANE, Banco de la república y Superintendencia financiera.

Se utilizará las siguientes convenciones para las variables en los modelos propuestos.

TCB: Spread de la tasa corriente bancaria.

CCa: Tasa anual de crecimiento de la cartera de consumo.

ICCa: Tasa anual de crecimiento del índice de calidad de cartera de consumo.

TDa: Tasa anual de crecimiento de la población desempleada.

ISEa: Tasa anual de crecimiento del índice de seguimiento a la economía.

Contraste de cointegración etapa 1.

Para poder encontrar la relación de largo plazo, primero hay que probar si las series de datos son estacionarias de orden I (1). A los datos en bruto, se les aplicará logaritmo natural para poder analizar las tasas de crecimiento de estas variables, diferenciando tanto a las variables que están en tasa como en bruto a 12 periodos para obtener su variación anual<sup>5</sup> y adicionalmente la variables de cartera comercial se pasara a una series desestacionalizada utilizando el filtro de HoltWinters<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> Ver anexo 1.

<sup>6</sup> Metodología para separar la serie por sus componentes de tendencia, ciclo y estacionaridad ver anexo 2

### 3.1.1 Estacionaridad

Para las variables a probar cointegración se contrasta la hipótesis nula de estacionaridad individual de cada una de ellas.

$$H_0: \rho = 0 \text{ no es estacionaria}$$

$$H_a: \rho < 0 \text{ es estacionaria}$$

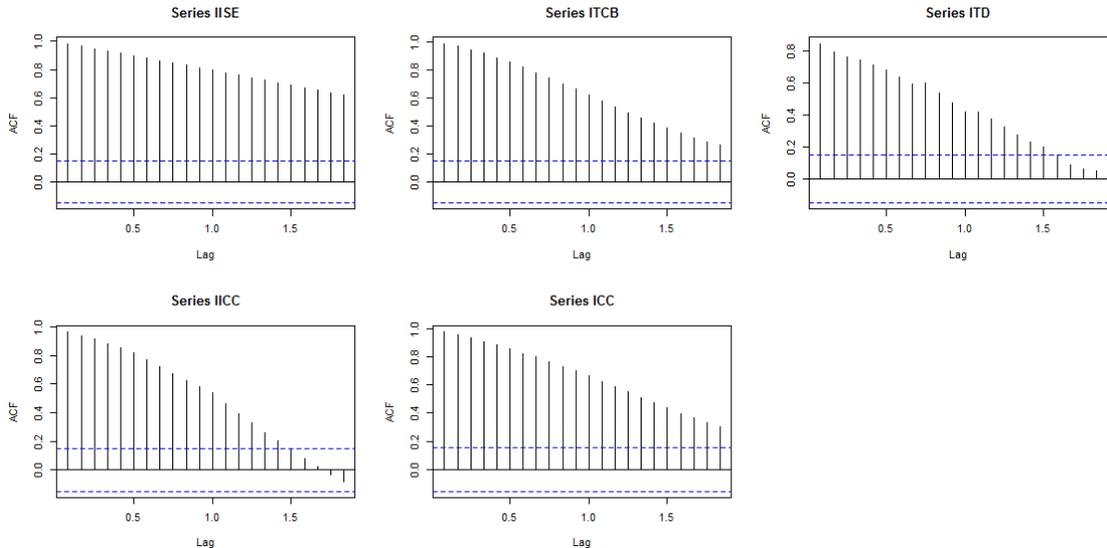


Figura 12: ACF de las variables.

Variables	Test DF	Valor critico al 5 (tau3)	Hipotesis
dITCB	-1,2289	-3,43	$H_0 : p = 0$
dICC	-1,27884	-3,43	$H_0 : p = 0$
dIICC	-1,6053	-3,43	$H_0 : p = 0$
dITD	-3,18992	-3,43	$H_0 : p = 0$
dIISE	-1,1234	-3,43	$H_0 : p = 0$

Tabla 2: Test Dickey Fuller Aumentado

Se prueba que para cada variable se encuentra raíz unitaria siendo esto síntoma de no estacionaridad. Se procede a probar si con la primera diferencia las series son estacionarias.

Variabes	Test DF	Valor critico al 5 (tau3)	Hipotesis	Orden de integracion
dITCB	-6,8955	-3,43	$H_a : p < 0$	$I(1)$
dICC	-10,6804	-3,43	$H_a : p < 0$	$I(1)$
dIICC	-10,5266	-3,43	$H_a : p < 0$	$I(1)$
dITD	-14,5245	-3,43	$H_a : p < 0$	$I(1)$
dIISE	-12,291	-3,43	$H_a : p < 0$	$I(1)$

Tabla 3: Test Dickey Fuller Aumentado a las variables con su primera diferencia.

Para todas las variables el test de DFA se encuentra en la región de rechazo por esto se puede concluir que se rechaza la hipótesis nula y adicional se puede decir que todas las series a la primera diferencia son estacionarias.

$$ICCa = \beta_0 + \beta_1 CCa + \beta_2 TCBa + \beta_3 TDa + \beta_4 ISEa + \varepsilon_t$$

Ecuación 13: Modelo lineal de relación de largo plazo.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.0014	0.0017	0.81	0.4214
l.CCda	-0.0206	0.0035	-5.88	0.0000
l.TCBda	0.2202	0.0201	10.97	0.0000
l.TDda	0.0251	0.0078	3.21	0.0017
l.ISEda	0.0423	0.0404	1.05	0.2972

Note: \*\*p>0.05

Tabla 4: Resultado de modelo lineal de relación de largo plazo.

Al obtener el modelo se procede a analizar los residuos  $\varepsilon_t$  para ver si cumple las condición de estacionaridad para probar cointegración entre las variables exógenas y la variable explicada.

Variabes	Test DF	Valor critico al 5 (tau3)	Hipotesis	Orden de integracion
et	-2,01625	-1,95	$H_a : < 0$	$I(0)$

Tabla 5: Test DFA del error o residuo del modelo de relación a largo plazo.

Contrastamos que el error del modelo a largo plazo es estacionario en orden de integración cero, esto nos permite concluir que existe cointegración entre las variables macroeconómicas y el índice de calidad de cartera. Basados en esto podemos construir la ecuación de corrección de error.

### 3.2 CONTRASTE DE COINTEGRACIÓN ETAPA 2.

Se especifica la ecuación a corto plazo para poder obtener los estimadores que miden los efectos de las variables macroeconómicas y si la relación de largo plazo es significativa en el corto plazo.

$$ICCa_t = \mu + ICCa_{t-1} + \beta_1 CCa_{t-1} + \beta_2 TDa_{t-1} + \beta_3 TCBa_{t-1} + \beta_4 ISEa_{t-1} + \beta_5 \varepsilon_{t-1} + u_t$$

*Ecuación 14: Modelo del corto plazo con las variables regresoras.*

## 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

### 4.1 ESPECIFICACIÓN MODELO DE CORTO PLAZO.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.0008	0.0004	2.00	0.0472*
l.ICCda1	0.5373	0.0408	13.18	0.0000***
l.TCBda1	0.0767	0.0098	7.81	0.0000***
l.TDda1	0.0044	0.0018	2.38	0.0188*
l.CCda1	-0.0136	0.0011	-12.54	0.0000***
l.ISEda1	0.0162	0.0089	1.82	0.0711·
error.ecm	0.4602	0.0415	11.09	0.0000***
Observations	140			
R <sup>2</sup>	0.9807			
Adjusted R <sup>2</sup>	0.9798			
F Statistic	p-value: ¡2.2e-16 (df = 6; 133)			

*Note:* \*\*\*p<0.001; \*\*p<0.01; \*p<0.05; ·p<0.1

*Tabla 6: Estimadores de la ecuación de corrección de error.*

Se encuentra que:

Una variación en un periodo atrás en el índice de calificación de cartera va aumentar el índice de cartera presente en 0.53 puntos porcentuales. Siendo esta variable estadísticamente significativa al 0.05.

Una variación en la tasa corriente bancaria va aumentar el índice de cartera presente en 0.076 puntos porcentuales. Siendo esta variable estadísticamente significativa al 0.05.

Si se presenta un crecimiento del 1% de la población desempleada va aumentar el índice de cartera presente en 0.44% por ciento. Siendo esta variable estadísticamente significativa al 0.05.

Si se presenta un crecimiento del 1% del saldo de la cartera de crédito de consumo va disminuir el índice de cartera presente en 1.36% por ciento. Siendo esta variable estadísticamente significativa al 0.05.

Si se presenta un crecimiento del 1% del índice de seguimiento de la economía va aumentar el índice de cartera presente en 1.62% por ciento. Siendo esta variable estadísticamente significativa al 0.1.

El error.ecm que compone el efecto del largo plazo es significativo al 0.05 confirmando que existe una relación de cointegración entre las variables regresoras y el índice de calidad de cartera.

#### 4.1.1 Análisis del error del modelo de corrección de errores

Se analiza si el error del modelo cumple con las condiciones de ruido blanco gaussiano para que la simulación del modelo pueda ajustarse a la serie original lo mejor posible.

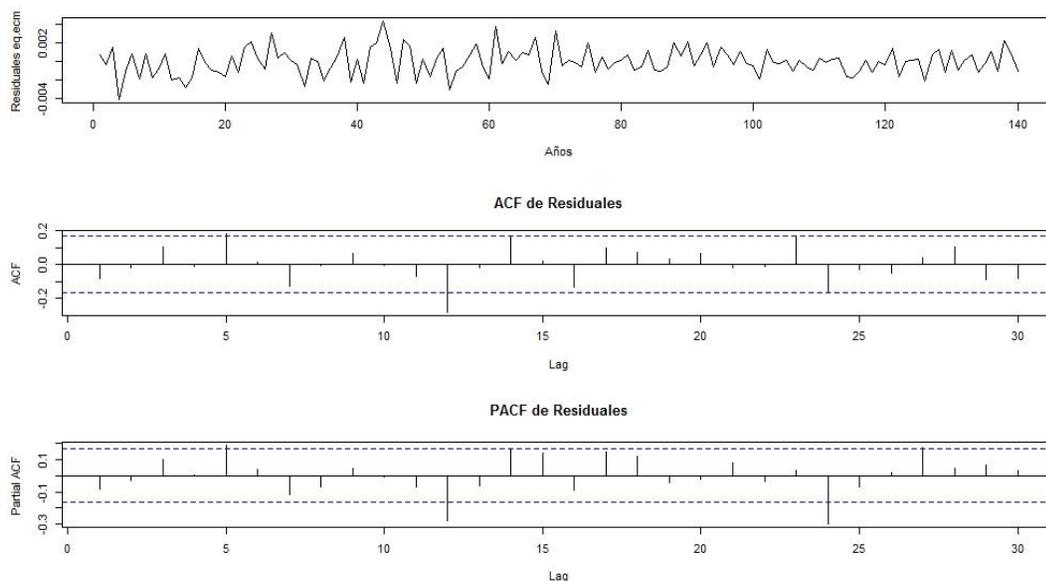


Figura 13: Estructura del residuo del modelo de corrección de error.

Al revisar el ACF y PACF de los residuos se encuentra que aún permanece estructura AR<sup>7</sup> Y MA<sup>8</sup>, para poder hacer un mejor ajuste al modelo se procede a utilizar la técnica de modelamiento ARIMAX.

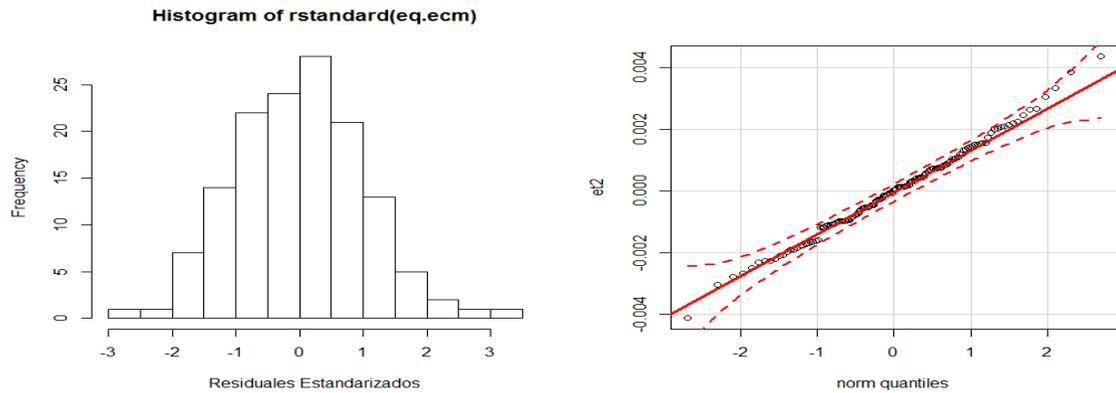


Figura 14: Pruebas gráficas de normalidad de los residuos del modelo de corrección de error.

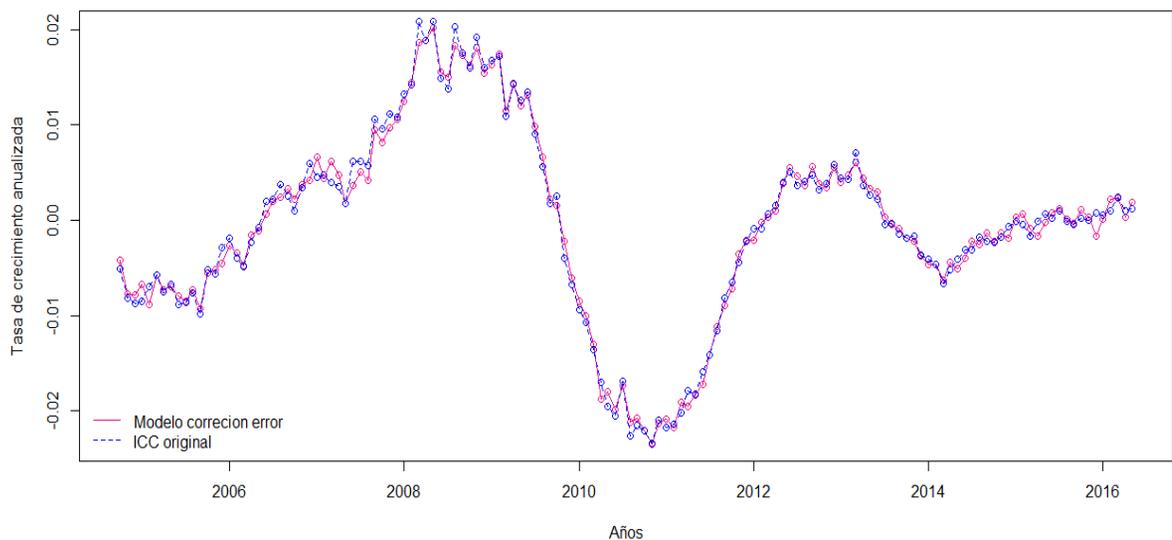


Figura 15: Modelación del índice de calificación de cartera ECM.

Aunque los residuales del modelo se comportan con una distribución normal, al revisar los autocorrelogramas se halla, que algunos rezagos se salen de las bandas de autocorrelación, debido a lo anterior, al modelar la serie del índice de calidad de cartera aún no se ajusta lo suficiente a la serie original como se ve en el periodo del 2008 al 2009 de la figura 14.

<sup>7</sup> Proceso Autoregresivo

<sup>8</sup> Proceso Media móvil

	W	X-squared	df	p-value
Box-Ljung		43.429	24	0.0088
Jarque Bera		0.95057	2	0.6217
Shapiro-Wilk	0.99527			0.9311

Note: \*\*p>0.05

Tabla 7: Test de autocorrelación y normalidad sobre el error del modelo.

Los test corroboran la identificación visual de autocorrelación ( $K \neq 0, Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) \neq 0$ ) y normalidad en el error ( $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ ) no cumpliendo los requisitos para ser ruido blanco.

#### 4.2 Extensión del modelo de corrección de errores con metodología SARIMAX (6,0,12) (0,0,2)<sub>12</sub> ~ XREG

$$ICC_a = \Phi ICCa_{t-1} + \dots + \Phi ICCa_{t-6} + \theta u_{t-1} + \dots + \theta u_{t-12} + ICCa_{t-1} + \beta_1 CCa_{t-1} + \beta_2 TDa_{t-1} + \beta_3 TCBa_{t-1} + \beta_4 ISEa_{t-1} + \beta_5 \varepsilon_{t-1} + u_{t-12}$$

Ecuación 15: Modelo SARIMAX para el índice de calificación de cartera.

	Estimate	Std. Error	Pr(> t )
ar1	0,1405	0,5249	0,789
ar2	-0,4001	0,282	0,155
ar3	0,5451	0,3859	0,157
ar4	0,0378	0,4355	0,930
ar5	0,2906	0,199	0,144
ar6	0,1304	0,2781	0,639
ma1	0,4897	0,5272	0,352
ma2	0,9636	0,2586	0,000
ma3	0,5283	0,5938	0,373
ma4	0,6851	0,2698	0,011
ma5	0,8169	0,4284	0,056
ma6	0,5534	0,3971	0,163
ma7	0,7568	0,33	0,021
ma8	0,668	0,4542	0,141
ma9	0,7622	0,3546	0,031
ma10	0,7386	0,4256	0,082
ma11	0,3605	0,4047	0,373
ma12	-0,1285	0,2392	0,591
sma1	-0,3814	0,2774	0,169
sma2	-0,6177	0,1845	0,000
l.TCBda1	0,072	0,0199	0,000
l.TDda1	-0,0065	0,0019	0,000
l.ISEda1	0,0186	0,0146	0,203
l.CCda1	-0,01	0,0025	0,000
error.ecm	0,4186	0,0426	0,000
Observations	140		
sigma <sup>2</sup>	8.58e-07		
log likelihood	751.19		
BIC	-1378.832		

Note: \*\*p<0.05

Tabla 8: Estimadores en la ecuación de corrección de error por medio de metodología ARIMAX.

Se encuentra que:

Una variación en la tasa corriente bancaria, aumenta el índice de calificación de cartera presente en 0.072 puntos porcentuales. Siendo esta variable estadísticamente significativa al 0.05.

Si se presenta un crecimiento del 1% de la población desempleada, disminuye el índice de calificación de cartera presente en 0.44 por ciento. Siendo esta variable estadísticamente significativa al 0.05.

Si se presenta un crecimiento del 1% del saldo de la cartera de crédito de consumo, disminuye el índice de cartera presente en 1.36 por ciento. Siendo esta variable estadísticamente significativa al 0.05.

Si se presenta un crecimiento del 1% del índice de seguimiento de la economía va a aumentar el índice de cartera presente en 1.62 por ciento. Esta variable no es estadísticamente significativa al 0.05.

El error.ecm que compone el efecto del largo plazo es significativo al 0.05 confirmando que existe una relación de cointegración entre las variables regresoras y el índice de calidad de cartera.

#### 4.2.1 Análisis del error del modelo de corrección de errores

Se analiza si el error del modelo cumple con las condiciones de ruido blanco gaussiano, esto con el fin, que la simulación del modelo pueda ajustarse a la serie original lo mejor posible.

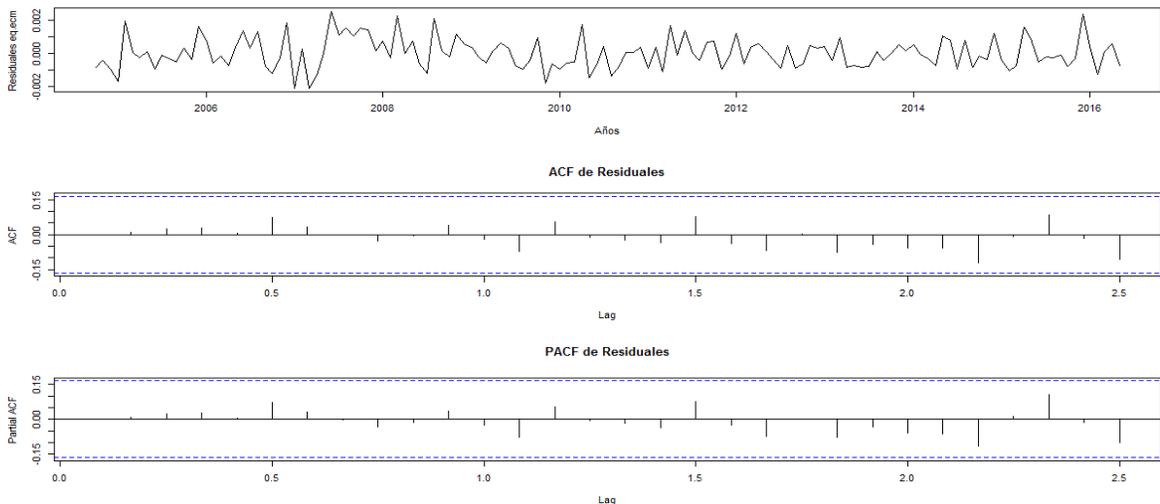


Figura 16: Estructura del residuo del modelo de corrección de error en metodología ARIMAX.

Al revisar el ACF y PACF de los residuos se encuentra que no persiste estructura AR Y MA, por lo cual se evidencia que no hay autocorrelación en los errores.

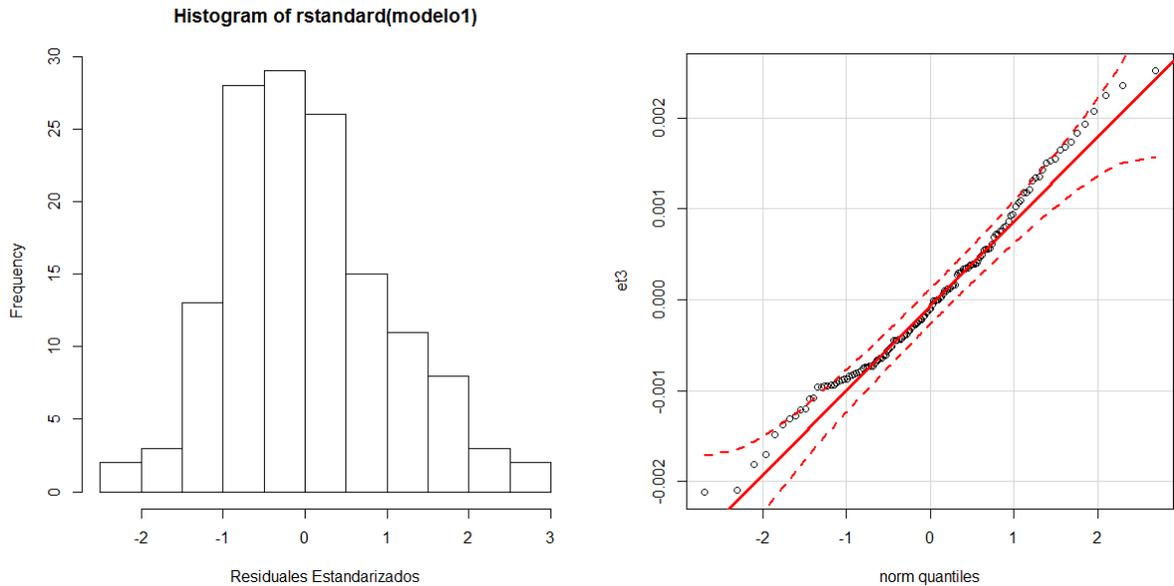


Figura 17: Pruebas gráficas de normalidad de los residuos del modelo de corrección de error con metodología ARIMAX.

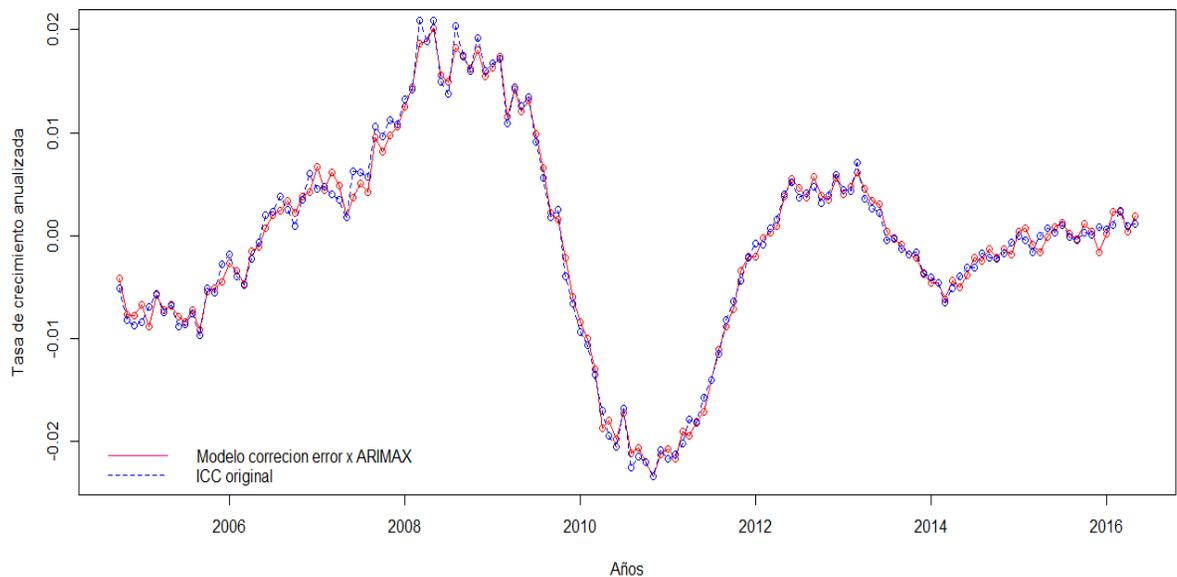


Figura 18: Modelación del índice de calificación de cartera SARIMAX (6,0,12) (0,0,2)12 ~ xreg.

En la figura 16 se puede observar que gráficamente el residuo del modelo ARIMAX no presenta normalidad, aún así al revisar los autocorrelogramas se halla

que ningún rezago se sale de las bandas de autocorrelación, por esto, al modelar la serie del índice de calidad de cartera, se logra un mejor ajuste a la serie original como se ve en la figura 17.

	W	X-squared	df	p-value
Box-Ljung		7.0776	24	0.9997
Box-Ljung $e^2$		29.69	24	0.1952
Jarque Bera		4.1276	2	0.127
Shapiro-Wilk	0.98065			0.04453

Note: \*\*p>0.05

Tabla 9: Test de autocorrelación y normalidad sobre el error del modelo ARIMAX.

Los test corroboran la identificación visual de no autocorrelación en el residuo del modelo ( $K = 0, Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$ ) y que no presenta normalidad en el error ( $\varepsilon_t$  no se distribuye  $N(0, \sigma^2)$ ) cumpliendo los requisitos para ser ruido blanco pero no gaussiano.

#### 4.3 PRONOSTICO

Para el pronóstico utilizamos los datos del último semestre del 2016 y los 2 primeros meses de 2017, esto debido a que el modelo ARIMAX necesita ser alimentado por las variables regresoras rezagadas en un periodo para poder pronosticar; con base a lo anterior, se pronosticó hasta el tercer mes de 2017.

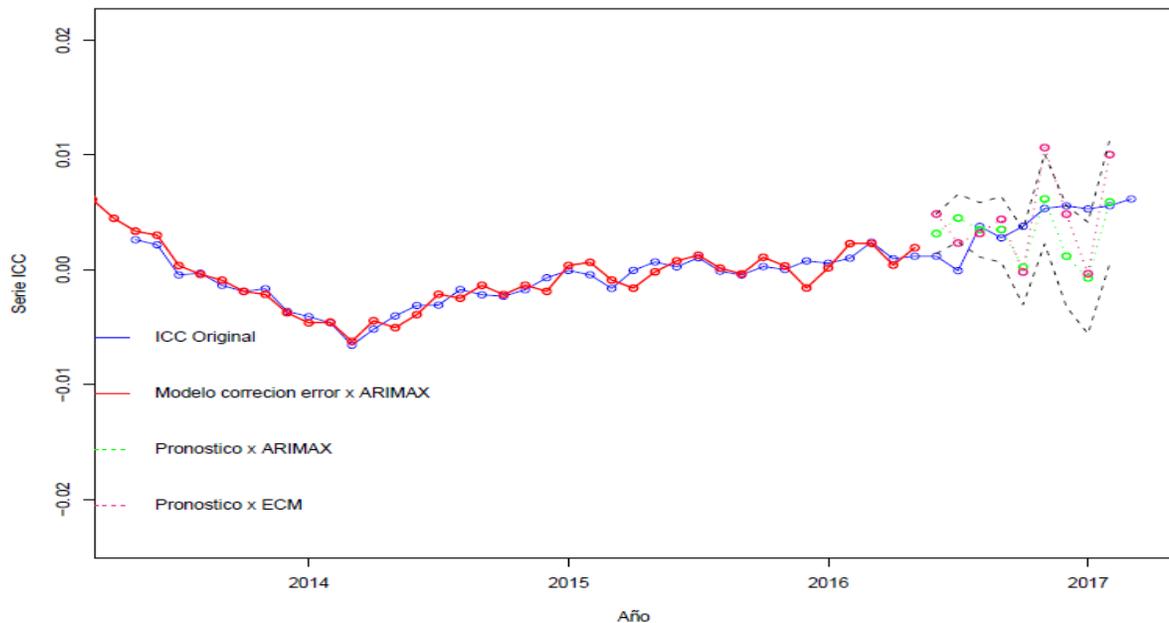


Figura 19: Pronostico del índice de calificación de cartera.

El modelo ARIMAX se ajusta más a la realidad en el periodo pronosticado y adicional la serie original se encuentra entre los límites que propone el modelo.

	MAE	MAPE
ECM	0.0011	1.2318
ECM ARIMAX	0.0007	0.3416

Podemos evidenciar que el modelo que tiene menor perdida en el error es el ARIMAX.

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

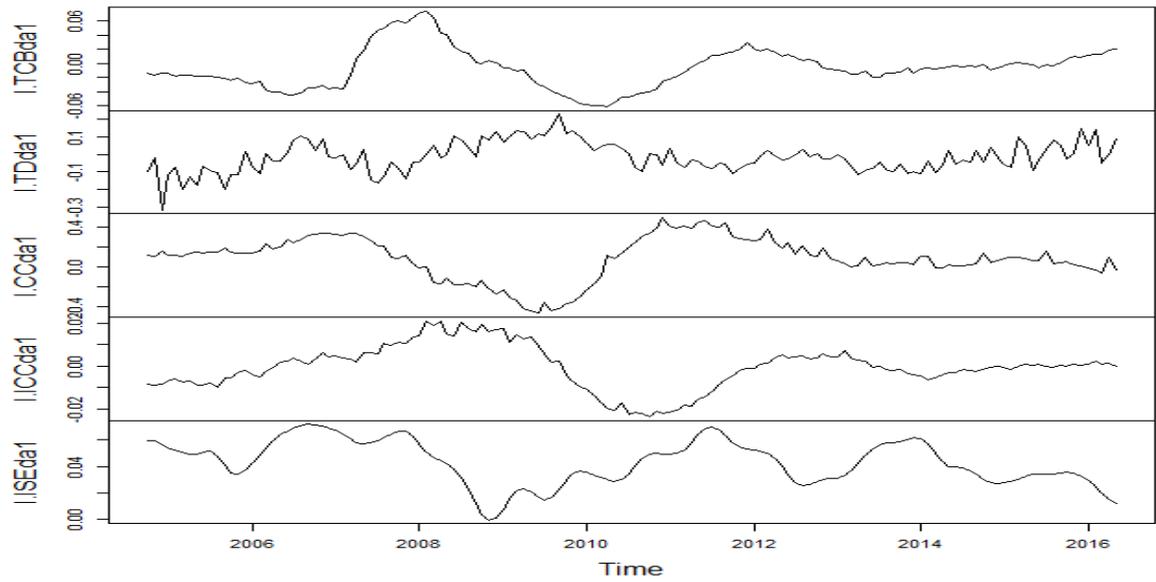
- Se encuentra que los efectos a largo plazo de las variables regresoras de carácter macroeconómico, logran explicar el comportamiento a corto plazo de periodos siguientes, debido a que se comprobó, que existe Cointegración entre el índice de calidad de cartera y las variables macroeconómicas.
- Si los precios del mercado de crédito de consumo aumentan, impulsara el crecimiento del deterioro de la calidad de cartera.
- Se encontró que, ante un crecimiento en la población desempleada, se dará una reducción en el índice de calidad de cartera. Aunque va contra la lógica económica, se puede plantear la hipótesis de que se va a reducir la cantidad de créditos disminuyendo el saldo de la cartera y a su vez la porción de cartera vencida.
- Si se presenta un crecimiento en el saldo de la cartera de crédito de consumo, se reducirá el índice de calidad de cartera, debido a que representará una porción menor del saldo de la cartera.
- Al analizar el efecto de los ciclos económicos, utilizando un proxy de la actividad económica de Colombia, como lo es el índice de seguimiento económico, este no llega hacer individualmente significativo estadísticamente en el comportamiento del índice de calidad de cartera. Se recomienda para futuras investigaciones utilizar un proxy diferente que recoja mejor el comportamiento de la economía de Colombia.

## REFERENCIAS

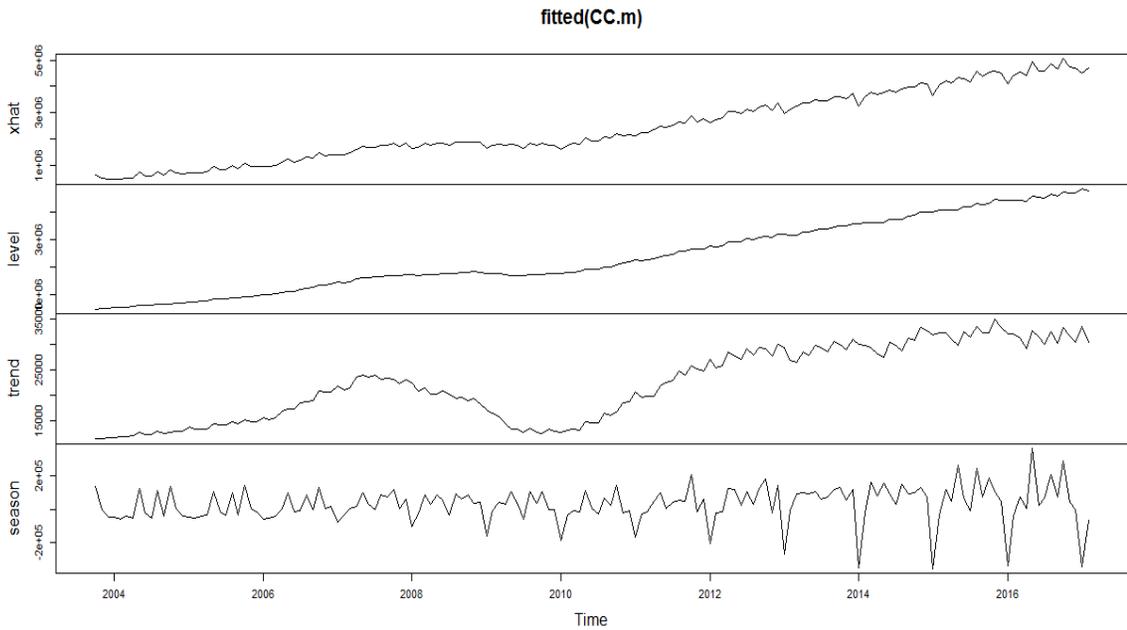
- Gutiérrez, J., Vásquez, D., (2008). Un análisis de cointegración para el riesgo de crédito, Reporte de estabilidad financiera, Banco de la Republica de Colombia.
- Mahadeva, L., Robinson, P., (2004). Prueba de raíz unitaria para ayudar a la construcción de un modelo, Ensayo 76, Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos (Asociación Regional de Bancos Centrales).
- Tellez, C., Lemus, D., (2014). Estadística Descriptiva y Probabilidad con aplicaciones en R, Bogotá: Fundación Universitaria Los Libertadores.
- Gujarati, D., Porter, D., (2015). Econometría, Mc Graw Hill, Quinta Edición.
- Wooldridge, J., (2010). Introducción a la econometría, Un enfoque moderno, Cuarta edición.
- Romero, J., (2015). Calidad de la cartera y ciclo económico: algunos hechos estilizados en Colombia, Observatorio Económico Colombia, BBVA Research.
- Amaya, C., (2005). Evaluación del Riesgo de Crédito en el Sistema Financiero Colombiano, Reporte de estabilidad financiera, Banco de la Republica de Colombia.
- Engle, R., Granger, C., (1987). Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing, Vol.55, N° 2, pp 251- 276.
- Achuelo, A., (1993). Series Integradas y Cointegradas: Una Introducción, Revista de Economía Aplicada, Vol 1, N° 1, pp 151-164.
- Dickey, D., Fuller, W., (1981). Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root, Econometrica, Vol. 49, N° 4, pp 1057-1072.
- Malagón, D.,(2011). El crecimiento del crédito y su impacto sobre la cartera Vencida: una relación directa y rezagada, Apuntes del Supervisor, Superintendencia Financiera de Colombia.
- Mauricio, J., (2007). Introducción al análisis de series temporales, Universidad Complutense de Madrid
- Avellaneda, J., Ochoa, C., Figueroa, J., (2012). Comparación entre un sistema

neuro difuso auto organizado y un modelo Arimax en la predicción de series económicas volátiles. Artículo de investigación Ingeniería, Vol 17, N°2, pp 26-34.

## ANEXOS



Anexo 1: Series anualizadas.



Anexo 2: Descomposicion de serie cartera de consumo.