

---

# Estudio de las cualidades de vuelo y manejo de una aeronave tipo planeador para instrucción

---



Presentado por

**Yeison Alfonso Castellanos Sanabria**

**Wilmer Alejandro Rodríguez Agudelo**

**LOS LIBERTADORES**  
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

**Fundación Universitaria Los Libertadores**

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Programa de Ingeniería Aeronáutica

Bogotá D.C, Colombia

2019

---

# Estudio de las cualidades de vuelo y manejo de una aeronave tipo planeador para instrucción

---

Presentado por  
**Yeison Alfonso Castellanos Sanabria**  
**Wilmer Alejandro Rodríguez Agudelo**

en cumplimiento parcial de los requerimientos para optar al título

de

## Ingeniero Aeronáutico

*Dirigida por:*

**Germán Wedge Rodríguez Pirateque**

**Fundación Universitaria Los Libertadores**

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Programa de Ingeniería Aeronáutica

Bogotá D.C, Colombia

2019

**Notas de aceptación**



---

---

---

---

---

# LOS LIBERTADORES

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

---

Firma del jurado 1

---

Firma del jurado 2

Bogotá DC, Junio de 2019.



# LOS LIBERTADORES

## FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Las directivas de la Fundación Universitaria Los Libertadores, los jurados calificadores y el cuerpo docente no son responsables por los criterios e ideas expuestas en el presente documento. Estos corresponden únicamente a los autores y a los resultados de su trabajo.



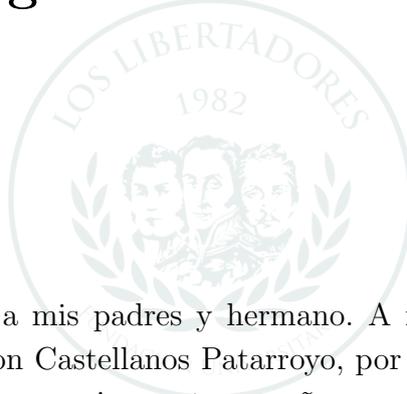
# LOS LIBERTADORES

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

*“La mejor forma de honrar la  
memoria de nuestros seres  
queridos, es hacer las cosas  
bien en su nombre.”*  
- Anónimo -



# Agradecimientos



A la vida por brindarme a mis padres y hermano. A mi madre Luz Marina Sanabria Chacón y mi padre Nelson Castellanos Patarroyo, por su amor y sacrificio en darnos las herramientas suficientes para seguir nuestros sueños, son mi inspiración. Al ingeniero Germán Wedge Rodríguez Pirateque por su ayuda y paciencia en la consecución de este proyecto, y a cada uno de mis familiares, amigos, compañeros y profesores que de alguna u otra forma contribuyeron en el transcurso de mi carrera universitaria y este proyecto grado. Finalmente, en homenaje a las personas que se fueron y llegaron a mi vida, en especial a Alfonso Castellanos Torres y Víctor Manuel Chacón, sus recuerdos y enseñanzas permanecerán para siempre en nuestras mentes y corazones.

¡Gracias...totales!

*“Mucha gente critica la Fórmula 1  
como un riesgo innecesario.  
Pero, ¿cómo sería la vida si solo  
hiciéramos lo necesario?”  
- Niki Lauda -*



# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1	Relaciones dinámicas . . . . .	5
2.1.1	Ley de inercia . . . . .	5
2.1.2	Ley fundamental de la dinámica . . . . .	5
2.1.3	Principio de acción y reacción . . . . .	6
2.2	Referencias aerodinámicas . . . . .	7
2.2.1	Número Mach . . . . .	8
2.2.2	Número Reynolds . . . . .	8
2.2.3	Fuerzas aerodinámicas . . . . .	8
2.3	Sistemas de ejes . . . . .	9
2.3.1	Ejes de tierra . . . . .	10
2.3.2	Ejes de cuerpo . . . . .	11
2.3.3	Ejes de estabilidad, aerodinámicos o viento . . . . .	11
2.3.4	Variables de perturbación . . . . .	12
2.3.5	Movimientos en una aeronave . . . . .	12
2.3.6	Actitud en aeronaves y ángulos de Euler . . . . .	13
2.4	Modelo matemático . . . . .	14
2.4.1	Derivadas de estabilidad y control aerodinámico . . . . .	14
2.4.2	Ecuaciones de movimiento . . . . .	15
2.4.3	Regla de Cramer . . . . .	15
2.4.4	Función de transferencia . . . . .	15
2.4.5	Transformada de Laplace . . . . .	16
2.4.6	Teorema de valor inicial y valor final . . . . .	16
2.5	Schweizer SGU 2-22 . . . . .	16
2.6	Estabilidad . . . . .	18
2.6.1	Estabilidad estática . . . . .	18
2.6.2	Estabilidad Dinámica . . . . .	20
2.7	Diagramas de análisis de estabilidad . . . . .	25

2.7.1	Diagrama de Bode . . . . .	25
2.7.2	Gráfico del lugar de las raíces . . . . .	26
2.7.3	Gráfico de respuesta de escalón unitario . . . . .	27
2.8	Normas de cualidades de vuelo . . . . .	27
2.8.1	Importancia de la aeronave . . . . .	28
2.8.2	Requerimientos de cualidades vuelo y manejo . . . . .	29
2.9	Criterio de Routh-Hurwitz . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Estado del arte</b>	<b>33</b>
3.1	Estudios a nivel Nacional . . . . .	33
3.2	Estudios a nivel Internacional . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Marco legal</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Problemática</b>	<b>39</b>
5.1	Planteamiento del problema . . . . .	39
5.2	Justificación . . . . .	39
5.3	Alcance . . . . .	40
5.4	Pregunta de investigación . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Objetivos</b>	<b>41</b>
6.1	Objetivo general. . . . .	41
6.2	Objetivos específicos. . . . .	41
<b>7</b>	<b>Metodología</b>	<b>43</b>
<b>8</b>	<b>Desarrollo</b>	<b>45</b>
8.1	Cálculo de condición de equilibrio . . . . .	45
8.1.1	Estimación de Peso . . . . .	45
8.1.2	Cálculo del balance . . . . .	46
8.1.3	Cálculo de inercias . . . . .	47
8.1.4	Factor de carga y velocidades de maniobra . . . . .	49
8.1.5	Cálculos aerodinámicos . . . . .	51
8.1.6	Cálculo de la condición de equilibrio . . . . .	52
8.2	Respuestas en controles aerodinámicos . . . . .	55
8.2.1	Ecuaciones de movimiento . . . . .	55
8.2.2	Derivadas de estabilidad y control aerodinámico . . . . .	60
8.2.3	Funciones de transferencia . . . . .	76
8.2.4	Respuesta de controles . . . . .	80
8.3	Respuestas de estabilidad . . . . .	84

8.3.1	Estabilidad estática . . . . .	84
8.3.2	Estabilidad dinámica . . . . .	84
8.3.3	Análisis de cualidades de vuelo y manejo . . . . .	88
<b>9</b>	<b>Resultados</b>	<b>91</b>
9.1	Condición total de equilibrio longitudinal . . . . .	91
9.2	Respuestas en controles aerodinámicos . . . . .	92
9.2.1	Respuestas por variables de perturbación . . . . .	92
9.2.2	Respuestas por aceleraciones . . . . .	99
9.3	Respuestas de estabilidad estática y dinámica . . . . .	103
9.3.1	Respuesta de estabilidad dinámica . . . . .	103
9.3.2	Respuesta de estabilidad estática . . . . .	110
<b>10</b>	<b>Análisis de resultados</b>	<b>111</b>
<b>11</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>115</b>
<b>12</b>	<b>Recomendaciones</b>	<b>117</b>
<b>A</b>	<b>Datos técnicos</b>	<b>119</b>
A.1	Datos técnicos y geométricos <i>Schweizer SGU 2-22</i> . . . . .	119
<b>B</b>	<b>Gráficas polares</b>	<b>123</b>
B.1	Ala NACA 43012a . . . . .	123
B.2	Estabilizador horizontal NACA 0009 . . . . .	124
B.3	Estabilizador vertical NACA 0009 . . . . .	125
B.4	Pendientes de sustentación . . . . .	126
<b>C</b>	<b>Condición de equilibrio</b>	<b>127</b>
C.1	Ecuaciones alternas . . . . .	127
C.2	Gráficas condición de equilibrio a 21.0109 m/s . . . . .	128
<b>D</b>	<b>Información bibliográfica de apoyo</b>	<b>129</b>
D.1	Variables de movimiento en perturbación . . . . .	129
D.2	Transformación de variables ángulos Euler . . . . .	130
D.3	Derivadas de estabilidad y control aerodinámico . . . . .	131



# Índice de figuras

2.1	Puntos de referencia aerodinámica. . . . .	7
2.2	Fuerzas aerodinámicas. . . . .	9
2.3	Ejes de tierra. . . . .	10
2.4	Sistema de ejes de movimiento y aerodinámicos. . . . .	11
2.5	Variables de perturbación fijas sobre los ejes de cuerpo. . . . .	12
2.6	Vista frontal, movimiento de balanceo. . . . .	12
2.7	Vista lateral izquierda, movimiento de Cabeceo. . . . .	13
2.8	Vista superior, movimiento de Guiñada. . . . .	13
2.9	Rotaciones de ángulos de Euler. . . . .	14
2.10	Estructura <i>Schweizer SGU 2-22</i> . . . . .	17
2.11	Condición de estabilidad longitudinal. . . . .	19
2.12	Tipos de estabilidad dinámica. . . . .	20
2.13	Desarrollo del movimiento modo fugoide. . . . .	20
2.14	Desarrollo del movimiento modo de periodo corto. . . . .	21
2.15	Desarrollo del movimiento modo de balanceo. . . . .	22
2.16	Desarrollo del movimiento modo de balanceo holandés. . . . .	23
2.17	Desarrollo del movimiento modo espiral. . . . .	24
2.18	Diagrama Bode en respuesta de actitud de cabeceo. . . . .	25
2.19	Gráfico del lugar de las raíces. . . . .	26
2.20	Gráfico de respuesta de escalón unitario. . . . .	27
8.1	Diagrama <i>v-n</i> . . . . .	50
8.2	Condición de estabilidad estática longitudinal a 21.0109 m/s. . . . .	52
8.3	Fuerzas y momentos actuantes en condición de equilibrio. . . . .	53
8.4	Velocidad a través de ángulos de perturbación. . . . .	55
9.1	Respuesta de velocidad axial debido al elevador. . . . .	93
9.2	Impulso velocidad axial debido al elevador. . . . .	93
9.3	Rampa velocidad axial debido al elevador. . . . .	93
9.4	Respuesta de velocidad normal debido al elevador. . . . .	93
9.5	Impulso velocidad normal debido al elevador. . . . .	94

9.6	Rampa velocidad normal debido al elevador. . . . .	94
9.7	Respuesta de ángulo de cabeceo debido al elevador. . . . .	94
9.8	Impulso ángulo de cabeceo debido al elevador. . . . .	94
9.9	Rampa ángulo de cabeceo debido al elevador. . . . .	94
9.10	Respuesta de tasa de cabeceo debido al elevador. . . . .	95
9.11	Impulso tasa de cabeceo debido al elevador. . . . .	95
9.12	Rampa tasa de cabeceo debido al elevador. . . . .	95
9.13	Respuesta de velocidad lateral debido al alerón. . . . .	95
9.14	Impulso velocidad lateral debido al alerón. . . . .	96
9.15	Respuesta de ángulo de balanceo debido al alerón. . . . .	96
9.16	Impulso ángulo de balanceo debido al alerón. . . . .	96
9.17	Respuesta de tasa de balanceo debido al alerón. . . . .	96
9.18	Impulso tasa de balanceo debido al alerón. . . . .	97
9.19	Respuesta de tasa de guiñada debido al alerón. . . . .	97
9.20	Impulso tasa de guiñada debido al alerón. . . . .	97
9.21	Respuesta de velocidad lateral debido al rudder. . . . .	97
9.22	Impulso velocidad lateral debido al rudder. . . . .	98
9.23	Respuesta de ángulo de balanceo debido al rudder. . . . .	98
9.24	Impulso ángulo de balanceo debido al rudder. . . . .	98
9.25	Respuesta de tasa de balanceo debido al rudder. . . . .	98
9.26	Impulso tasa de balanceo debido al rudder. . . . .	99
9.27	Respuesta de tasa de guiñada debido al rudder. . . . .	99
9.28	Impulso tasa de guiñada debido al rudder. . . . .	99
9.29	Respuesta de aceleración axial debido al elevador. . . . .	100
9.30	Impulso aceleración axial debido al elevador. . . . .	100
9.31	Respuesta de aceleración normal debido al elevador. . . . .	101
9.32	Impulso aceleración normal debido al elevador. . . . .	101
9.33	Respuesta de aceleración lateral debido al alerón. . . . .	101
9.34	Impulso aceleración lateral debido al alerón. . . . .	102
9.35	Respuesta de aceleración lateral debido al rudder. . . . .	102
9.36	Impulso aceleración lateral debido al rudder. . . . .	102
9.37	Diagrama de Bode velocidad axial debido al elevador. . . . .	103
9.38	Raíces velocidad axial debido al elevador. . . . .	103
9.39	Diagrama de Bode velocidad normal debido al elevador. . . . .	104
9.40	Raíces velocidad normal debido al elevador. . . . .	104
9.41	Diagrama de Bode tasa de cabeceo debido al elevador. . . . .	104
9.42	Raíces tasa de cabeceo debido al elevador. . . . .	104
9.43	Diagrama de Bode ángulo de cabeceo debido al elevador. . . . .	105
9.44	Raíces ángulo de cabeceo debido al elevador. . . . .	105

9.45	Diagrama de Bode velocidad lateral debido al alerón. . . . .	106
9.46	Raíces velocidad lateral debido al alerón. . . . .	106
9.47	Diagrama de Bode tasa de balanceo debido al alerón. . . . .	106
9.48	Raíces tasa de balanceo debido al alerón. . . . .	106
9.49	Diagrama de Bode tasa de guiñada debido al alerón. . . . .	107
9.50	Raíces tasa de guiñada debido al alerón. . . . .	107
9.51	Diagrama de Bode ángulo de balanceo debido al alerón. . . . .	107
9.52	Raíces ángulo de balanceo debido al alerón. . . . .	107
9.53	Diagrama de Bode velocidad lateral debido al rudder. . . . .	108
9.54	Raíces velocidad lateral debido al rudder. . . . .	108
9.55	Diagrama de Bode tasa de balanceo debido al rudder. . . . .	109
9.56	Raíces tasa de balanceo debido al rudder. . . . .	109
9.57	Diagrama de Bode tasa de guiñada debido al rudder. . . . .	109
9.58	Raíces tasa de guiñada debido al rudder. . . . .	109
A.1	Vista superior <i>Schweizer SGU 2-22</i> . . . . .	119
A.2	Vista frontal <i>Schweizer SGU 2-22</i> . . . . .	120
A.3	Vista lateral izquierda <i>Schweizer SGU 2-22</i> . . . . .	120



# Índice de cuadros

2.1	Clasificación de regímenes de fluidos. . . . .	8
2.2	Clasificación de aeronaves. . . . .	28
2.3	Fase de vuelo. . . . .	28
2.4	Niveles de cualidades de vuelo. . . . .	29
2.5	Amortiguamiento modo de periodo corto. . . . .	29
2.6	Control anticipation parameter. . . . .	29
2.7	Amortiguamiento modo fugoide. . . . .	30
2.8	Tiempo de modo de balanceo. . . . .	30
2.9	Tiempo constante del modo espiral. . . . .	30
2.10	Amortización y frecuencia modo balanceo holandés. . . . .	31
8.1	Comparación de cálculos de peso. . . . .	46
8.2	Centro de gravedad eje X. . . . .	47
8.3	Centro de gravedad eje Z. . . . .	47
8.4	Inercias ala principal. . . . .	47
8.5	Inercias estabilizador horizontal. . . . .	48
8.6	Inercias estabilizador vertical. . . . .	48
8.7	Inercias fuselaje. . . . .	49
8.8	Inercias Schweizer SGU 2-22. . . . .	49
8.9	Velocidades de maniobras permitidas. . . . .	51
8.10	Condiciones atmosféricas del vuelo. . . . .	51
8.11	Datos aerodinámicos obtenidos a 21.0109 m/s. . . . .	51
8.12	Condición de vuelo. . . . .	54
8.13	Derivadas longitudinales de estabilidad y control adimensionales . . . . .	70
8.14	Derivadas lateral-direccionales de estabilidad y control adimensionales . . . . .	70
8.15	Derivadas longitudinales simplificadas . . . . .	76
8.16	Derivadas lateral-direccional simplificadas. . . . .	76
8.17	Datos de cualidades de vuelo y manejo. . . . .	89
9.1	Respuestas iniciales en controles aerodinámicos. . . . .	92
9.2	Respuestas finales en controles aerodinámicos. . . . .	92

9.3	Respuestas iniciales de aceleraciones. . . . .	99
9.4	Respuestas finales de aceleraciones. . . . .	100
9.5	Respuestas de estabilidad dinámica elevador. . . . .	103
9.6	Respuestas de estabilidad dinámica alerón. . . . .	105
9.7	Respuestas de estabilidad dinámica rudder. . . . .	108
9.8	Respuesta de estabilidad estática longitudinal. . . . .	110
A.1	Datos de rendimiento. . . . .	120
A.2	Datos geométricos ala principal. . . . .	120
A.3	Datos geométricos estabilizador vertical. . . . .	121
A.4	Datos geométricos estabilizador horizontal. . . . .	121
A.5	Datos preliminares de estimación de peso. . . . .	121
D.1	Variables de movimiento. . . . .	129
D.2	Fuerzas actuantes. . . . .	129
D.3	Momentos actuantes. . . . .	129
D.4	Componentes angulares actuantes. . . . .	130
D.5	Componentes lineales actuantes. . . . .	130
D.6	Derivadas de estabilidad aerodinámicas longitudinales adimensionales. . . . .	131
D.7	Derivadas de estabilidad aerodinámicas latera-direccional adimensionales. . . . .	132
D.8	Derivadas de control aerodinámico adimensionales. . . . .	133
D.9	Derivadas de estabilidad aerodinámicas longitudinales dimensionales. . . . .	134
D.10	Derivadas de estabilidad aerodinámicas lateral-direccional dimensionales. . . . .	135
D.11	Derivadas de control aerodinámico dimensionales. . . . .	135
D.12	Derivadas de estabilidad aerodinámica longitudinales reducidas. . . . .	135
D.13	Derivadas de estabilidad aerodinámica lateral-direccional reducidas. . . . .	136
D.14	Derivadas de control aerodinámico reducidas. . . . .	136



# Glosario

$a$	Pendiente de sustentación del ala principal; Aceleración; Velocidad del sonido; Aceleración.
$a'$	Aceleración inercial.
$a_0$	Coefficiente de sustentación del estabilizador horizontal a cero grados de incidencia.
$a_1$	Pendiente de sustentación del estabilizador horizontal.
$a_{1F}$	Pendiente de sustentación del estabilizador vertical.
$a_{2\eta}$	Pendiente de sustentación del elevador.
$a_{2\xi}$	Pendiente de sustentación del alerón.
$a_{2\zeta}$	Pendiente de sustentación del rudder.
$ac$	Centro aerodinámico.
$AR$	Relación de aspecto.
$b$	Envergadura.
$\bar{c}$	Cuerda alar.
$c.g$	Centro de gravedad.
$cp$	Centro de presiones.
$C_D$	Coefficiente de arrastre.
$C_{D_0}$	Coefficiente de arrastre en sustentación cero.
$C_{D_i}$	Coefficiente de arrastre inducido.
$C_L$	Coefficiente de sustentación.
$C_{L_w}$	Coefficiente de sustentación del ala principal.
$C_{L_T}$	Coefficiente de sustentación del estabilizador horizontal.
$C_m$	Coefficiente de momento de cabeceo.
$C_{m_0}$	Coefficiente de momento de cabeceo a cero sustentación.
$D$	Arrastre.
$e$	Factor de eficiencia de Oswald.
$F$	Fuerza aerodinámica.
$F_c$	Fuerza aerodinámica debido a la curvatura.
$F_\alpha$	Fuerza aerodinámica debido a la incidencia.
$g$	Gravedad.
$h$	Altitud; Centro de gravedad en porcentaje de cuerda.
$\dot{h}$	Tasa de cambio de altitud.
$h_0$	Centro aerodinámico en porcentaje de cuerda.
$h_n$	Punto neutro de controles fijos.
$H_F$	Envergadura estabilizador vertical.
$I_x$	Momento de inercia de balanceo.
$I_y$	Momento de inercia de cabeceo.
$I_z$	Momento de inercia de guiñada.
$I_{xy}$	Producto de inercia con respecto los ejes OX y OY.

$I_{xz}$	Producto de inercia con respecto los ejes OX y OZ.
$I_{yz}$	Producto de inercia con respecto los ejes OY y OZ.
$k$	Ganancia de entrada.
$k_D$	Constante empírica.
$k_q$	Ganancia de tasa de cabeceo.
$k_u$	Ganancia de tasa de velocidad axial.
$k_w$	Ganancia de tasa de velocidad normal.
$k_\theta$	Ganancia de tasa de actitud de cabeceo.
$k_\rho$	Factor de densidad de material.
$K_n$	Margen de estabilidad estático en controles fijos.
$L$	Sustentación; Momento de balanceo.
$l_f$	Distancia entre el centro de presiones del estabilizador vertical y centro de presiones del ala principal
$l_t$	Distancia entre el centro de presiones del estabilizador horizontal y centro de presiones del ala principal.
$l_F$	Distancia entre el centro de presiones del estabilizador vertical y centro de gravedad.
$l_T$	Distancia entre el centro de presiones del estabilizador horizontal y centro de gravedad.
$m$	Masa.
$M$	Número Mach; Momentos de cabeceo.
$M_0$	Número Mach local; Momento de cabeceo del ala con respecto al centro aerodinámico.
$M_T$	Momento de cabeceo del estabilizador horizontal con respecto al centro aerodinámico.
$n$	Factor de carga.
$N$	Momento de guiñada.
$O$	Origen del sistema de ejes.
$p$	Perturbación de tasa de balanceo.
$q$	Perturbación de tasa de cabeceo.
$r$	Perturbación de tasa de guiñada.
$Re$	Número Reynolds.
$s$	Mitad de envergadura del ala principal; Operador de laplace.
$S$	Área del ala principal.
$S_B$	Área del fuselaje proyectado.
$S_d$	Factor de arrastre del fuselaje.
$S_F$	Área del estabilizador vertical.
$S_T$	Área del estabilizador horizontal.
$t$	Tiempo; Máximo espesor del perfil aerodinámico.
$T$	Constante de tiempo; Empuje.
$T_r$	Constante de tiempo modo balanceo.
$T_s$	Constante de tiempo modo espiral.

$T_u$	Numerador cero en la función de transferencia de velocidad axial.
$T_w$	Numerador cero en la función de transferencia de velocidad normal.
$T_\theta$	Numerador cero en la función de transferencia de la tasa y actitud de cabeceo.
$T_2$	Tiempo a doble amplitud.
$u$	Perturbación de velocidad axial.
$U$	Componente total de velocidad axial.
$U_e$	Velocidad axial en equilibrio.
$U_E$	Velocidad axial referida a los ejes de tierra.
$v$	Perturbación de velocidad lateral.
$V$	Componente total de velocidad lateral.
$V_e$	Velocidad lateral en equilibrio.
$V_E$	Velocidad lateral referida a los ejes de tierra.
$V_0$	Velocidad en estado de equilibrio.
$\bar{V}_F$	Tasa de volumen del estabilizador vertical.
$\bar{V}_T$	Tasa de volumen del estabilizador horizontal.
$V_\zeta$	Velocidad lateral total con respecto el rudder.
$V_\xi$	Velocidad lateral total con respecto el alerón.
$w$	Perturbación de Velocidad normal; Peso.
$W$	Componente total de velocidad normal.
$W_e$	Velocidad normal en equilibrio.
$W_E$	Velocidad normal referida a los ejes de tierra.
$X$	Fuerza axial.
$X$	Eje longitudinal.
$\dot{x}$	Tasa de cambio de masa sobre el eje longitudinal.
$Y$	Fuerza lateral.
$Y$	Eje lateral.
$y_2$	Distancia máxima del alerón sobre OY.
$y_1$	Distancia mínima del alerón sobre OY.
$\dot{y}$	Tasa de cambio de masa sobre el eje lateral.
$y_B$	Arrastre lateral del fuselaje.
$Z$	Fuerza normal.
$Z$	Eje vertical.
$Z_w$	Altura en el fuselaje del ala principal.
$Z_T$	Altura en el fuselaje del estabilizador horizontal.
$\dot{z}$	Tasa de cambio de masa sobre el eje vertical.

### Letras griegas

$\alpha$	Ángulo de ataque o incidencia.
$\alpha_e$	Ángulo de incidencia en equilibrio.
$\alpha_T$	Ángulo de incidencia local estabilizador horizontal.
$\alpha_w$	Ángulo de incidencia local del ala principal.

$\alpha_0$	Ángulo de ataque a cero sustentación.
$\alpha_{w_0}$	Ángulo de incidencia del ala principal a cero sustentación.
$\alpha_{w_r}$	Ángulo de incidencia del ala-fuselaje.
$\beta$	Ángulo de perturbación de deslizamiento lateral.
$\gamma$	Perturbación de trayectoria de vuelo.
$\gamma_e$	Trayectoria de vuelo en equilibrio.
$\Gamma$	Ángulo diedro del ala principal.
$\Delta$	Polinomio característico; Denominador de las funciones de transferencia.
$\varepsilon$	Downwash en el estabilizador horizontal.
$\varepsilon_0$	Ángulo de downwash en el estabilizador horizontal a cero sustentación.
$\zeta$	Perturbación del ángulo del rudder; Tasa de amortiguación.
$\zeta_d$	Tasa de amortiguación balanceo holandés.
$\zeta_p$	Tasa de amortiguación fugoide.
$\zeta_s$	Tasa de amortiguación de oscilación de cabeceo de periodo corto.
$\eta$	Perturbación del ángulo del elevador.
$\eta_e$	Ángulo del elevador para la condición de equilibrio.
$\eta_T$	Ángulo de configuración del estabilizador horizontal.
$\theta$	Perturbación del ángulo de cabeceo ó pitch; Un ángulo en general.
$\theta_e$	Ángulo de cabeceo en equilibrio.
$\dot{\theta}$	Velocidad angular de cabeceo.
$\Lambda_{1/4}$	Ángulo de flechamiento al 25 % de cuerda.
$\lambda$	Relación de taperado.
$\mu$	Viscosidad dinámica.
$\xi$	Perturbación del ángulo del alerón.
$\rho$	Densidad del aire.
$\phi$	Perturbación del ángulo de balanceo, alabeo ó roll; Un ángulo en general.
$\dot{\phi}$	Velocidad angular de balanceo.
$\psi$	Perturbación del ángulo de guiñada o yaw.
$\dot{\psi}$	Velocidad angular de guiñada.
$\omega$	Frecuencia natural; Velocidad angular.
$\omega_d$	Frecuencia natural no amortiguada balanceo holandés.
$\omega_p$	Frecuencia natural no amortiguada balanceo fugoide.
$\omega_s$	Frecuencia natural no amortiguada oscilación de cabeceo de periodo corto.
$\infty$	Infinito.



---

# Estudio de las cualidades de vuelo y manejo de una aeronave tipo planeador para instrucción

## Resumen

El siguiente trabajo de grado tiene como objetivo principal realizar un estudio de las cualidades de vuelo y manejo de un planeador de instrucción. Para el desarrollo del trabajo planteamos un modelo dinámico encaminado a calcular el estado de equilibrio longitudinal a pequeñas perturbaciones en condiciones de régimen de vuelo subsónico. Con los datos de equilibrio longitudinal, se proyectaron las ecuaciones de movimiento linealizadas hallando los valores adimensionales, dimensionales y en términos reducidos de las derivadas de estabilidad y control aerodinámico sobre el eje longitudinal y eje lateral-direccional. Seguido a esto, se propusieron las funciones de transferencia características por perturbaciones y aceleraciones a la velocidad de mejor relación del planeo, permitiendo calcular las respuestas en controles aerodinámicos para cada caso. Finalmente, obtuvimos los modos de oscilación característicos, y así, realizamos un análisis de acuerdo a los requerimientos de las cualidades de vuelo y manejo estandarizados. Los resultados y conclusiones son presentados en el desarrollo de este documento mostrando el cálculo de estabilidad, y sus efectos en las cualidades de vuelo y manejo.

**Palabras claves:** Modelo dinámico, estabilidad, dinámica, modos de estabilidad, cualidades de vuelo y manejo.



# Capítulo 1

## Introducción

Para la estabilidad y dinámica en aeronaves, la aerodinámica es el fenómeno físico más significativo en el estudio de cualquier objeto que se mueva sobre un fluido como el aire, siendo un aspecto influyente en los requerimientos para los cuales se puede respaldar el diseño aeronáutico. En consecuencia, la configuración aerodinámica determina en gran parte el desempeño estático y dinámico de una aeronave en una misión de vuelo. Este estudio de las cualidades de vuelo y manejo fue realizado indispensablemente para entender cuantitativamente, desde la estática y dinámica, cada uno de los fenómenos físicos involucrados en una maniobra aérea, permitiendo calificar las capacidades de una aeronave deduciendo si es apta o no para desarrollar su misión desde los esquemas de aeronavegabilidad estandarizados, entendiéndolos como prioridad de diseño y fabricación, brindando al sector aeronáutico un nivel de posibilidades de seguridad en las capacidades de las aeronaves y aptitudes de los pilotos.

Desde la obtención de los datos técnicos, se realizó un análisis aerodinámico en *XFLR5*<sup>®</sup> estableciendo una base datos preliminar para cada régimen de velocidad permitida, y así con ayuda de *MatLab*<sup>®</sup>, crear un modelo dinámico de equilibrio total longitudinal, cálculo de derivadas de control y estabilidad aerodinámica, determinación de funciones de transferencia longitudinales y lateral-direccionales, respuestas de controles por variables de perturbación y aceleraciones, y finalmente la determinación de los modos de oscilación longitudinales y lateral-direccionales. Es así como los resultados y conclusiones se sustentarán con gráficas de la función *Escalón unitario* bajo entradas de perturbación, diagramas de *Bode* y diagramas del lugar de raíces por cada variable de perturbación. De igual manera, se expondrá el proceso de cálculo y respuestas por variables de perturbación y aceleraciones con respecto a los controles aerodinámicos primarios desde una condición de entrada de velocidad y ángulos de maniobra. Finalmente, queremos dar un modelo de estudio, en condiciones mínimas de vuelo, para entender cómo se determinan las características de estabilidad y cómo influyen en las cualidades de vuelo y manejo.



# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1 Relaciones dinámicas

#### 2.1.1 Ley de inercia

Esta ley considera que un cuerpo solo puede mantenerse en movimiento si se le aplica una fuerza, donde no puede cambiar por sí solo su estado inicial, ya sea en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, a menos que se aplique una fuerza. Considerando, fuerzas de roce o fricción, que los frena de forma progresiva [1].

$$\sum F = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \quad (2.1)$$

#### Sistemas de referencia inerciales

Los sistemas de referencia inerciales ayudan a observar las fuerzas netas con velocidad constante sobre un cuerpo. A diferencia de esto, un sistema de referencia con aceleración no es un sistema inercial, denominándose sistemas de referencia no inerciales [2].

#### 2.1.2 Ley fundamental de la dinámica

Esta ley expresa que el cambio de movimiento es directamente proporcional a la fuerza impresa y ocurre según su dirección, cuantificándose en términos de aceleración [3].

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \quad (2.2)$$

Para aeronaves convencionales, la variación de la masa por el gasto de combustible, es lo suficiente lenta como para despreciar el termino  $\dot{m}\vec{V}$  <sup>(1)</sup> con respecto a los otros términos que intervienen en el teorema [4].

---

<sup>1</sup> $\dot{m}$  : Variación de la masa con el tiempo

$$\vec{F} = m \frac{d(\vec{V})}{dt} \quad (2.3)$$

Por otro lado, el teorema de momento cinético establece.

$$\begin{aligned} \vec{G} &= \frac{d\vec{h}}{dt} \\ \vec{h} &= I\vec{\omega} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

Donde  $I_x, I_y, I_z$  son momentos de inercia al rededor del sistema de ejes de cuerpo, y  $I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$  son los productos de inercia.

$$\begin{aligned} I_x &= \sum \partial m (y^2 + z^2) \\ I_y &= \sum \partial m (x^2 + z^2) \\ I_z &= \sum \partial m (x^2 + y^2) \\ I_{xy} &= \sum \partial m (xy) \\ I_{xz} &= \sum \partial m (xz) \\ I_{yz} &= \sum \partial m (yz) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Al proyectar la ecuación 2.3 y 2.4 en un sistema de ejes de cuerpo tenemos dos ventajas [4]: en primer lugar, la distribución de masas respecto a los ejes es prácticamente constante y se desprecian los términos donde intervienen las derivadas respecto del tiempo de los momentos y productos de inercia, respecto a otros términos de los desarrollos; y en segundo lugar, como se asume plano de simetría, los productos de inercia  $I_{xy}$  y  $I_{yz}$  son idénticamente nulos despreciando los efectos dinámicos asociados a las deformaciones elásticas de la estructura, a los grados de libertad de los subsistemas articulados y los momentos cinéticos respecto de los subsistemas giratorios.

### 2.1.3 Principio de acción y reacción

Esta ley establece que siempre que un primer objeto <sup>(2)</sup> ejerce una fuerza sobre un segundo objeto <sup>(3)</sup>, este ejerce una fuerza de igual magnitud y dirección, pero en sentido opuesto sobre el primero [2].

$$F_{ab} = -F_{ba} \quad (2.6)$$

---

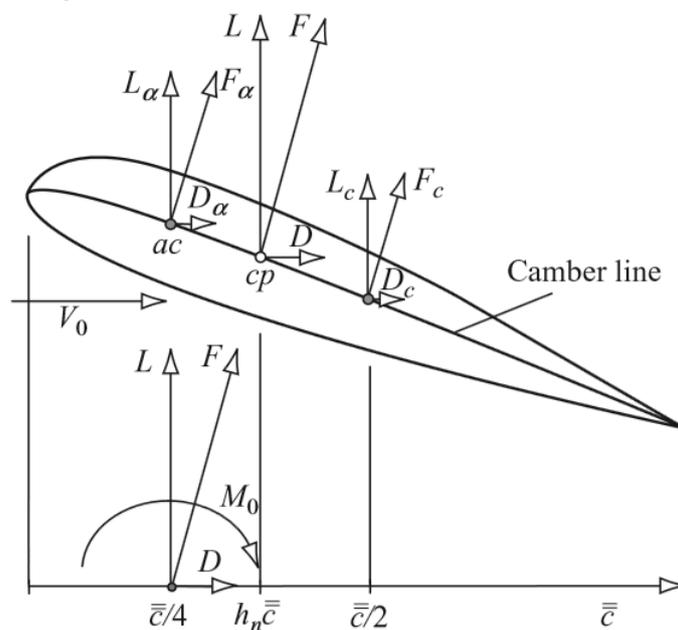
<sup>2</sup> $F_{ab}$  : Fuerza de acción en dirección de un punto  $a$  hacia un punto  $b$

<sup>3</sup> $F_{ba}$  : Fuerza de reacción en dirección de un punto  $b$  hacia un punto  $a$

## 2.2 Referencias aerodinámicas

El centro de presiones  $cp$ , como punto de referencia con respecto a la cuerda alar  $\bar{c}$ , es el punto donde actúa la fuerza aerodinámica resultante  $F$ , resuelta en una componente de sustentación  $L$  perpendicular a la velocidad, y una componente de arrastre  $D$  paralela a la velocidad. Esta fuerza  $F$  comprende dos componentes, debido a la curvatura  $F_c$  y debido al ángulo de ataque  $F_\alpha$ , resueltas en componentes de sustentación y arrastre, figura 2.1.  $F_c$  actúa a  $\bar{c}/2$  con contribuciones a altas velocidades, cuando el ángulo de ataque es pequeño, siendo cero para perfiles aerodinámicos simétricos.  $F_\alpha$  actúa a  $\bar{c}/4$  variando directamente con el ángulo de ataque con contribuciones a bajas velocidades, donde el ángulo de ataque es grande, explicando el por qué el ángulo de ataque a cero sustentación es un valor negativo pequeño; siendo  $F_c$  y  $F_\alpha$  los límites de  $cp$ , variando en función del ángulo de ataque, número Mach y la configuración aerodinámica. En consecuencia, el  $cp$  es de uso limitado como punto de referencia aerodinámico en estudios de estabilidad, donde en una condición de equilibrio, corresponde con el punto neutro fijo de los controles  $h_n$  [5].

Figura 2.1: Puntos de referencia aerodinámica.



Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

Para estudios de dinámica de vuelo [5], el punto de referencia más conveniente para determinar las derivadas de estabilidad y control aerodinámico es  $ac$ , desde que el momento de cabeceo sea producido por la fuerza  $F_c$ , este punto será constante con la variación del ángulo de ataque a pequeñas perturbaciones permitiendo resultados consistentes.

### 2.2.1 Número Mach

El número Mach es la tasa de velocidad de una aeronave  $V_0$  con respecto a la velocidad local del sonido  $a$  [6].

$$M = \frac{V}{a} \quad (2.7)$$

Una aeronave que se mueve a través del aire, producirá perturbaciones de presión en todas las direcciones con respecto a la velocidad del sonido. Si se vuela por debajo de Mach 1, las perturbaciones serán más rápidas que la aeronave con influencia del aire en la zona delantera, por ejemplo: los fenómenos de upwash creados desde el ala principal. Sin embargo, si se vuela por encima de Mach 1, las perturbaciones serán más lentas que la aeronave. Las características aerodinámicas dependen del régimen de vuelo, para tener precisión en las predicciones aerodinámicas a  $M > 0,5$  se deben incluir los efectos de compresibilidad dentro de los análisis [6].

Cuadro 2.1: Clasificación de regímenes de fluidos.

<b>Fluido subsónico incompresible</b>	$0,0 < M < 0,5$
<b>Fluido subsónico compresible</b>	$0,5 < M < 0,8$
<b>Fluido transónico</b>	$0,8 < M < 1,2$
<b>Fluido supersónico</b>	$1,2 < M < 5,0$
<b>Fluido hipersónico</b>	$5,0 < M$

*Fuente: Nelson, R. C. (1998). Flight stability and automatic control (Vol. 2). New York: WCB/McGraw Hill.*

### 2.2.2 Número Reynolds

Es un número adimensional usado en mecánica de fluidos para caracterizar el movimiento de un fluido indicando su estado laminar o turbulento [7]. A bajos números de Reynolds, el flujo en la capa límite tiende a ser laminar con velocidades uniformes y direcciones paralelas sobre el perfil. Sin embargo, por encima de ciertos números de Reynolds de transición, el flujo se convierte en turbulento mostrando efectos más desordenados del comportamiento del fluido. Su valor determinará la configuración aerodinámica en aeronaves.

$$R_e = \frac{\rho_0 V_0 \bar{c}}{\mu} \quad (2.8)$$

### 2.2.3 Fuerzas aerodinámicas

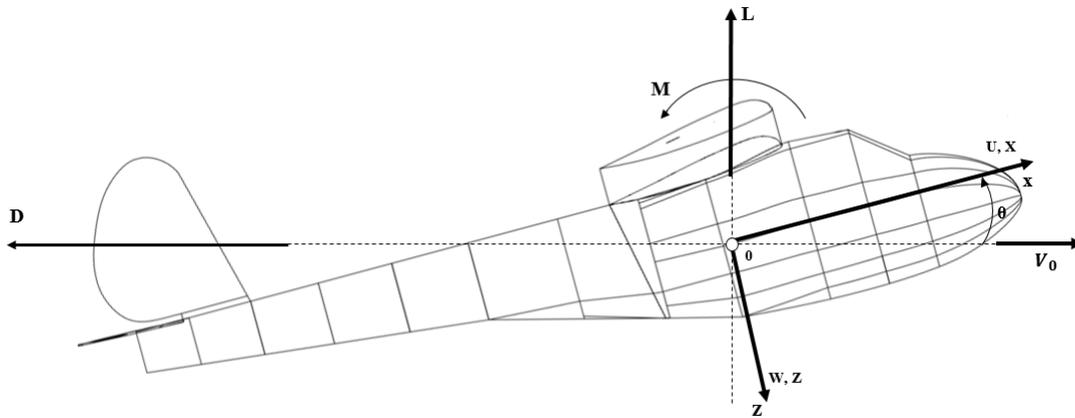
En vuelo subsónico incompresible [4], se desprecian los efectos de número Mach sobre las características aerodinámicas. Siendo así, se supone que la sustentación y resistencia no dependen de las deflexiones de los mandos, ecuación 2.9.

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_{L\alpha} \quad (2.9)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_{D\alpha}$$

Aerodinámicamente hablando [4], la sustentación está en función lineal al ángulo de ataque, salvo para grandes ángulos positivos y negativos, donde pierde la linealidad y se alcanza la pérdida positiva con un  $C_{L_{max}}$ , y la pérdida negativa con un  $C_{L_{min}}$ .

Figura 2.2: Fuerzas aerodinámicas.



Fuente: Autores.

Un vuelo normal es gobernado por el empuje, arrastre, sustentación y peso, figura 2.2[8]. El empuje mueve la aeronave en la dirección del movimiento creado con una hélice, motor a reacción o un cohete arrastrando y expulsando el aire en dirección opuesta; el arrastre es la fuerza que actúa opuesta a la dirección del movimiento, tiende a ralentizar la aeronave siendo causada por la fricción y las diferencias en la presión del aire; el peso es la fuerza causada por la gravedad; y la sustentación, es la fuerza que sostiene la aeronave en el aire producida por las alas. La forma en que las cuatro fuerzas actúan hacen que se garantice o no una condición de equilibrio.

$$L = W \quad (2.10)$$

$$T = D$$

## 2.3 Sistemas de ejes

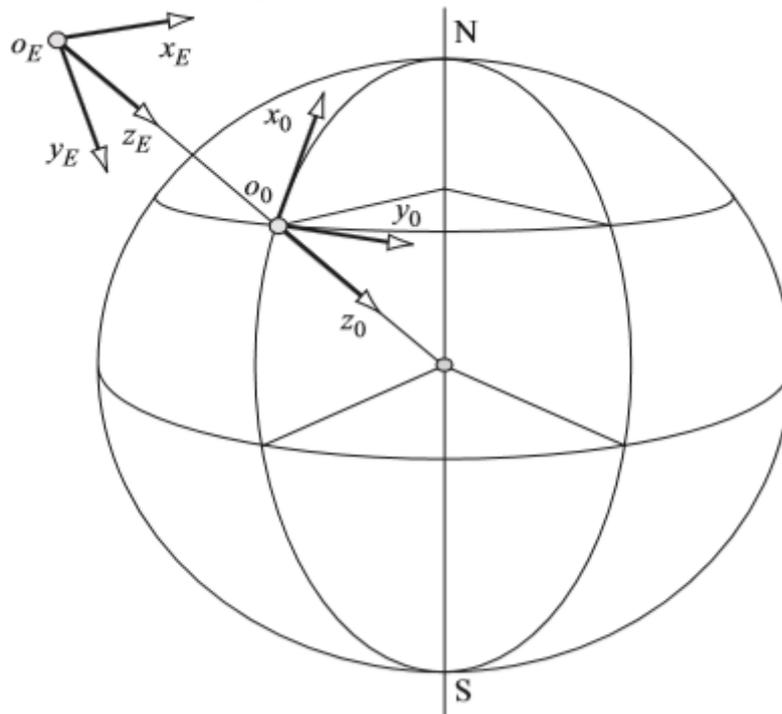
Para desarrollar el modelo matemático [5], es necesario establecer una base adecuada y segura donde las ecuaciones de movimiento se operen de manera ordenada. Para aeronaves, esta descripción puede ser relativamente compleja. Por lo tanto, el movimiento se describe

mediante una serie de variables que se relacionan en un sistema de ejes. Al hacer la elección apropiada del sistema, será mas ordenado y claro el desarrollo de las ecuaciones de movimiento evitando el caos en los resultados.

### 2.3.1 Ejes de tierra

En vuelo atmosférico, es normal medir el movimiento con respecto a la tierra. Para definir los ejes [5], un punto tangencial  $O$  en la superficie horizontal de la tierra es el origen del sistema ortogonal  $(O_0x_0y_0z_0)$ , donde  $O_0x_0$  apunta al norte,  $O_0y_0$  apunta al este y  $O_0z_0$  apunta hacia abajo paralelo al vector gravedad, figura 2.3. La trayectoria de vuelo se describe por las coordenadas en el sistema, siendo el más adecuado para vuelos localizados de navegación y rendimiento. Al contrario de esto, el sistema de coordenadas esféricas <sup>(4)</sup> es el método usado para vuelos que involucran lanzamiento y reingreso de vehículos espaciales.

Figura 2.3: Ejes de tierra.



*Fuente: Cook, M. V. (2012). Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control. Butterworth-Heinemann.*

Sin embargo, la velocidad angular de la tierra es un factor importante, y hace necesario definir un sistema de ejes espacial fijo con respecto al sistema de ejes de tierra. Para aplicaciones de la dinámica de vuelo a pequeñas perturbaciones [5], se asume un vuelo

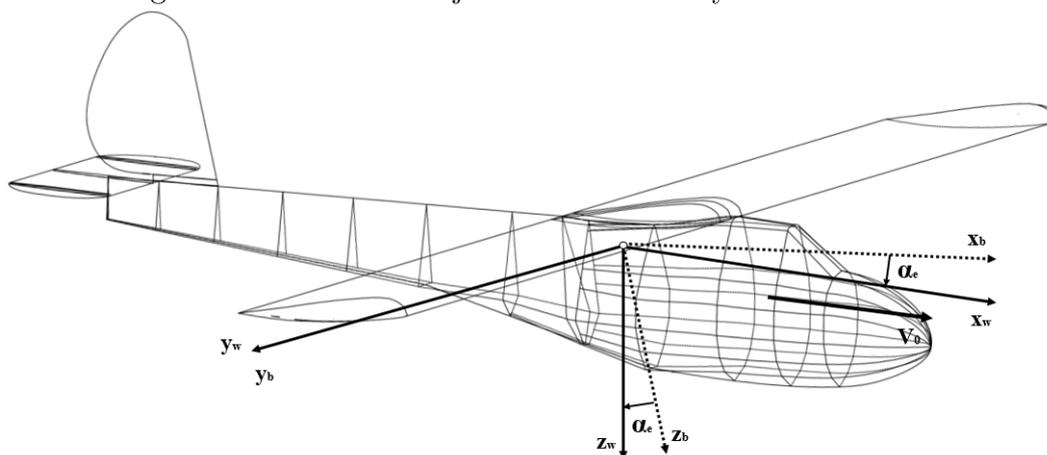
<sup>4</sup>[9] El sistema de coordenadas esféricas se basa en un sistema de coordenadas polares en un plano de tres dimensiones usado para determinar la posición espacial de un punto mediante un radio  $r$  y dos ángulos colatitud  $\theta$  y azimutal  $\phi$ .

sobre una tierra plana en estado recto y nivelado a una altitud constante, donde la actitud es la horizontal ( $O_E x_E y_E$ ) paralela al plano ( $O_0 x_0 y_0 z_0$ ). La única diferencia es que  $O_E x_E$  apunta en una dirección arbitraria de vuelo en lugar del norte. El eje  $O_E z_E$  apunta hacia abajo y el origen  $O_E$  coincide con el origen de los ejes de cuerpo. Los ejes terrestres ( $O_E x_E y_E$ ) se denominan ejes de trayectoria de referencia atados a la tierra por medio del vector de gravedad y proporcionan el marco de referencia inercial para el movimiento de aeronaves a pequeñas perturbaciones.

### 2.3.2 Ejes de cuerpo

Un sistema de ejes de cuerpo ( $O x_b y_b z_b$ ) permite bajo perturbaciones, desde una condición de vuelo inicial, movimientos con la estructura para cuantificarlos en términos de variables de perturbación, apéndice D-D.1. La configuración del sistema es arbitraria, pero se recomienda que el plano ( $O x_b z_b$ ) defina el plano de simetría [5], siendo  $O x_b$  el eje paralelo a la línea datum horizontal del fuselaje,  $O y_b$  es el eje paralelo al ala principal y  $O z_b$  es el eje en dirección. El origen  $O$  se fija en un punto conveniente del fuselaje que generalmente, pero no necesariamente, coincide con el centro de gravedad.

Figura 2.4: Sistema de ejes de movimiento y aerodinámicos.



Fuente: Autores.

### 2.3.3 Ejes de estabilidad, aerodinámicos o viento

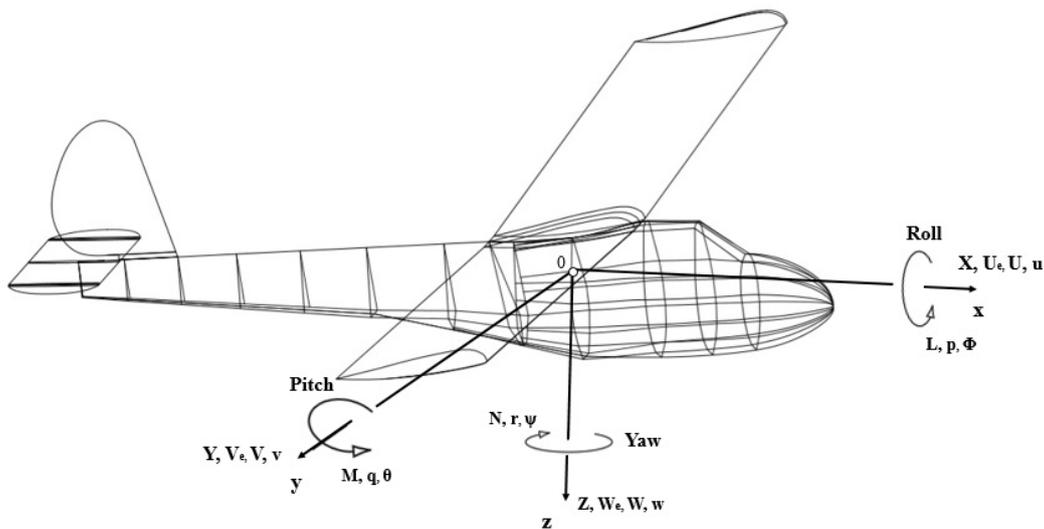
En vuelo simétrico <sup>(5)</sup> [5], los ejes ( $O x_w y_w z_w$ ) son iguales a los ejes de cuerpo girando sobre  $O y_b$  formando un  $\alpha_e$ , siendo este ángulo cero cuando están totalmente alineados. Para una condición de vuelo habrá un solo  $\alpha_e$ , por lo tanto, la orientación de los ejes de viento es diferente por cada condición. Sin embargo, su orientación se define y se fija desde el principio moviéndose con respecto a las perturbaciones.

<sup>5</sup>[10] En la condición de vuelo simétrico, las fuerzas y momentos de perturbación son dadas por la variación en el ángulo de cabeceo, donde la velocidad lateral, tasa de cambio de balanceo y guiñada son nulas, por lo tanto, el ángulo de perturbación de balanceo será cero.

### 2.3.4 Variables de perturbación

En una aeronave, el movimiento se describe en términos de fuerza, momento, actitud, velocidades lineales y angulares resueltas en un sistema de ejes desde una condición de vuelo recto, pero no necesariamente nivelado. Mientras la aceleración sea constante, las fuerzas y momentos suman cero y se da una condición de equilibrio, por lo tanto, si se altera esta condición, las fuerzas y momentos cambiarán, cuantificando el movimiento en términos de las variables de perturbación [5], apéndice D-D.1, siendo el sentido determinado por la regla de la mano derecha, figura 2.5.

Figura 2.5: Variables de perturbación fijas sobre los ejes de cuerpo.



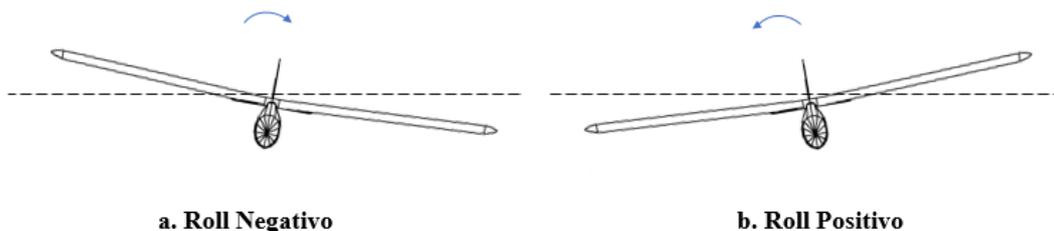
Fuente: Autores.

### 2.3.5 Movimientos en una aeronave

Una aeronave es un cuerpo rígido tridimensional que para mantenerse en vuelo genera movimientos en los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  configurados perpendicularmente entre sí, figura 2.5.

El eje longitudinal  $X$ , se extiende desde la nariz hasta la cola. Su rotación genera un ángulo  $(\phi)$  reflejado en el eje transversal, conocido como roll, alabeo o balanceo debido a una deflexión  $(\xi)$  de los alerones en el ala principal [5], figura 2.6.

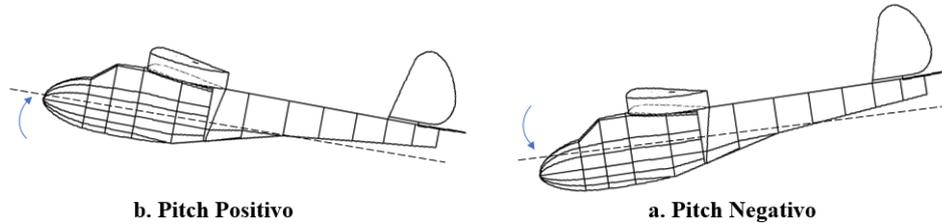
Figura 2.6: Vista frontal, movimiento de balanceo.



Fuente: Autores.

El eje lateral Y, paralelo a la envergadura del ala principal. Su rotación generan un ángulo ( $\theta$ ) reflejado en el eje longitudinal, conocido como cabeceo ó pitch debido a una deflexión ( $\eta$ ) del elevador en el estabilizador horizontal [5], figura 2.7.

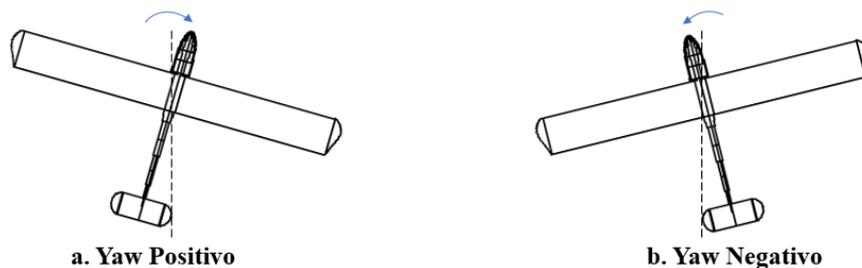
Figura 2.7: Vista lateral izquierda, movimiento de Cabeceo.



Fuente: Autores.

El eje vertical Z, perpendicular al eje longitudinal y lateral. Su rotación generan un ángulo ( $\psi$ ), denominado guiñada o yaw, producido por una deflexión ( $\zeta$ ) del rudder en el estabilizador vertical [5], figura 2.8.

Figura 2.8: Vista superior, movimiento de Guiñada.



Fuente: Autores.

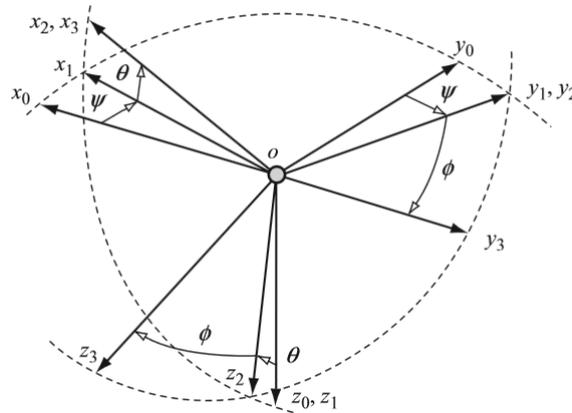
### 2.3.6 Actitud en aeronaves y ángulos de Euler

Los ángulos definidos por la rotación de la mano derecha <sup>(6)</sup> alrededor de los ejes de referencia se denominan ángulos de Euler. El sentido de las rotaciones y su orden es muy importante, siendo principalmente una orientación angular de los ejes fijos de cuerpo con respecto a los ejes de la tierra [5]. El orden preciso de las rotaciones suele denominarse convención *zyx*, donde cada letra representa el orden, o convención de Tait-Bryan, y es universalmente usada para orientar aeronaves y vehículos espaciales. En otros campos como la física de partículas o astronomía, son usuales convenciones como *zyz* o *xxz* [4]. El uso directo está en la transformación de componentes de desplazamiento, aceleración, velocidad lineal y angular desde los ejes del viento a los ejes del cuerpo a partir del balanceo, cabeceo y guiñada, figura 2.9.

<sup>6</sup>[11] La regla de la mano derecha es un método para determinar sentidos vectoriales, y tiene como base los planos cartesianos. Se emplea prácticamente en dos maneras: para sentidos y movimientos vectoriales lineales, y para movimientos y direcciones rotacionales.

Los ángulos de actitud son una aplicación de los ángulos de Euler.  $(Ox_0y_0z_0)$  son ejes de referencia y  $(Ox_3y_3z_3)$  son ejes fijos en ejes de cuerpo o ejes de viento. La actitud, con respecto a los ejes de referencia, se puede establecer considerando la rotación alrededor de cada eje requerido para traer  $(Ox_3y_3z_3)$  hacia  $(Ox_0y_0z_0)$ , donde  $(Ox_0y_0z_0)$  y  $(Ox_Ey_Ez_E)$  son los mismos, apéndice D-D.2.

Figura 2.9: Rotaciones de ángulos de Euler.



Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

## 2.4 Modelo matemático

Un modelo matemático [5], es una descripción numérica de un fenómeno físico enfatizando en aspectos significativos para generar conclusiones a partir de gráficas y ecuaciones. El modelo que permite estudiar el movimiento de una aeronave está constituido por las ecuaciones generales de movimiento en respuesta por controles como indicador medidor de desplazamiento, velocidad y aceleración en condiciones de rendimiento, altitud, geometría, masa, entre otras. Los modelos de alta fidelidad son capaces de reproducir la dinámica con precisión, pero rara vez son simples. A menudo, el deterioro en la fidelidad puede ser insignificante, siendo necesario desarrollar un modelo que equilibre el aumento de fidelidad de respuesta con el requisito de mantener la visibilidad funcional.

### 2.4.1 Derivadas de estabilidad y control aerodinámico

Las derivadas de estabilidad y control aerodinámico relacionan la dinámica de la aeronave y la aerodinámica del fuselaje [5], apéndice D-D.3. Para hallarlas, se asume un sistema de referencia de ejes de viento, en condiciones de vuelo subsónico con efectos de número Mach, reduciéndolas a una descripción más simple maximizando la visibilidad de los fenómenos físicos involucrados. Las expresiones analíticas rara vez son estimaciones precisas pero con gran utilidad dentro de un análisis de estabilidad y dinámica.

## 2.4.2 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento brindan una correcta comprensión y descripción intangible de las cualidades de vuelo y manejo relacionando estabilidad, parámetros de control y características aerodinámicas [5]. En su forma más simple, describen movimientos pequeños de perturbación a partir de una condición de equilibrio. En su forma más compleja, describen e incorporan la estabilidad estática, estabilidad dinámica, efectos aeroelásticos, perturbaciones atmosféricas y la dinámica del sistema de control. La razón principal de resolverlas es obtener una descripción matemática vectorial y gráfica de las variables de movimiento en respuesta a entradas de controles, o perturbaciones. Su solución se centra en proporcionar una visión clara de la naturaleza de la estabilidad, donde las transformadas de Laplace son el método más usado para determinar las funciones de transferencia, que mediante herramientas computacionales, brindan una imagen completa del comportamiento dinámico de la estabilidad, respuesta de tiempo y frecuencia permitiendo el diseño de sistemas de control de retroalimentación.

## 2.4.3 Regla de Cramer

La regla de Cramer [5], describe el proceso matemático para resolver conjuntos de ecuaciones algebraicas lineales, en nuestro caso las ecuaciones de movimiento. Como la regla de Cramer implica el uso del álgebra matricial, fácilmente se resuelven en *MatLab*. Para eliminar el sistema de forma simultánea, lineal y matemática, se describe la forma de matriz como:

$$y = Ax \tag{2.11}$$

donde  $x$  y  $y$  son vectores de columna y  $A$  es una matriz de coeficientes constantes, la regla de Cramer establece que:

$$x = A^{-1}y \equiv \left( \frac{\text{adjunto}A}{\text{determinante}A} \right) y \tag{2.12}$$

Donde la solución para  $x_i$ , de la fila  $i$  de la ecuación 2.12 está dada por

$$x_i = \frac{1}{|A|} (A_{1i}y_1 + A_{2i}y_2 + A_{3i}y_3 + \dots + A_{ni}y_n) \tag{2.13}$$

El numerador de la ecuación 2.13 es equivalente al determinante de  $A$  con la columna  $i$  reemplazada por el vector  $y$ . Así, la solución de la ecuación 2.11 es encontrar todo  $x_i$  evaluando  $n + 1$  determinantes.

## 2.4.4 Función de transferencia

Las funciones de transferencia [5], son un medio para describir las características de un sistema dinámico lineal relacionando la dinámica entre variables de entrada  $(\eta, \zeta, \xi)$

y salida  $(u, v, w, q, p, r, \theta, \phi, \psi)$ . En un modelo matemático de ecuaciones de movimiento a pequeñas perturbaciones, las funciones de transferencia relacionan variables de entrada longitudinales con variables de salida laterales, y viceversa. Todas las funciones de transferencia se escriben como dos polinomios de operadores de Laplace  $s$ , donde el polinomio numerador es al menos de orden menor que el polinomio denominador, aunque, ocasionalmente, suceda al contrario.

### 2.4.5 Transformada de Laplace

La transformada de Laplace [12], es un operador lineal para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas en ecuaciones algebraicas, para resolverse por medios algebraicos facilitando el análisis de un sistema dinámico como una representación entrada-salida pasando del dominio del tiempo, al dominio de la frecuencia compleja  $s$ .

$$\begin{aligned} L\{\dot{x}(t)\} &= sx(s) - x(0) \\ L\{\ddot{x}(t)\} &= s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \end{aligned} \quad (2.14)$$

### 2.4.6 Teorema de valor inicial y valor final

El teorema de valor inicial permite saber cual es la condición inicial en la que parte un sistema dinámico, y el teorema de valor final nos indica cual es el valor en estado estacionario del sistema dinámico. Estos teoremas pueden aplicarse si, y solamente si, el sistema es estable sin polos fuera de la región de estabilidad [12].

$$\begin{aligned} f(t)_{t \rightarrow \infty} &= \lim_{s \rightarrow 0} (sf(s)) \\ f(t)_{t \rightarrow 0} &= \lim_{s \rightarrow \infty} (sf(s)) \end{aligned} \quad (2.15)$$

## 2.5 Schweizer SGU 2-22

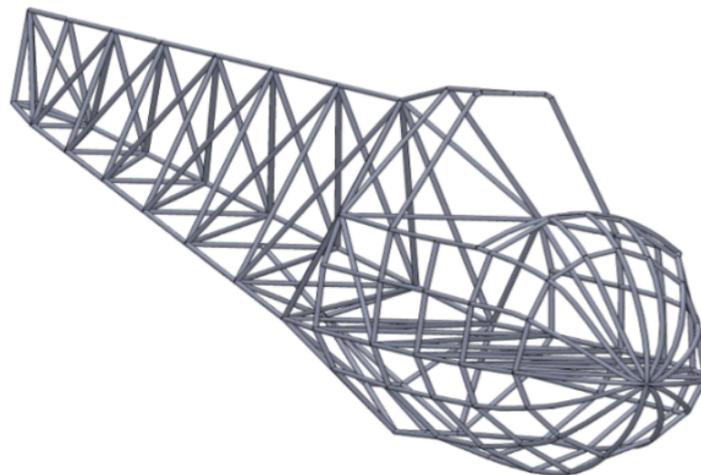
En el siglo XX el método individual de entrenamiento solía ser el más implementado, por lo tanto, los planeadores <sup>(7)</sup> monoplazas eran muy comunes dentro del medio, pero no tan seguros. Esto llevo a diseñar aeronaves biplaza corrigiendo métodos de entrenamiento, sustentados en la seguridad, eficiencia y economía. Requerimientos como la disposición de lanzamiento del cabrestante y asientos en tándem llevaron a los hermanos Schweizer a buscar la mejor opción para ofrecer al mercado. De esta forma es diseñado y fabricado el *Schweizer SGU 2-22* a partir del *SGU 1-21* y *SGU 1-7*; donde se continuó con la misma

---

<sup>7</sup>[13] **Planeador:** Aeronave más pesada que el aire impulsada con motor, o sin motor, de ala fija, con características diferentes a las aeronaves empleadas para las operaciones de servicios aéreos comerciales. Independientemente de que su diseño cuente o no con un certificado tipo, principalmente, deriva su sustentación en vuelo de reacciones aerodinámicas sobre superficies que permanecen fijas en determinadas condiciones de vuelo.

posición del instructor y estudiante adelante del ala principal, manteniendo los límites de centros de gravedad, sin compartimento de paracaídas. Al igual que el *SGU 1-7*, el ala era metálica, con un larguero simple construido a partir de extrusiones de aleación en las secciones, las costillas eran prensadas con láminas de revestimiento de aleación sobre el borde de ataque; y finalmente, techado con una tela en la parte trasera del ala. La experiencia adquirida en aviones militares de metal, y equipos de metalurgia, llevaron a un diseño de fuselaje en tubo de acero cromado brillante, figura 2.10. De igual forma, se usaron piezas del *SGU 1-19* como el fuselaje trasero, al igual que los sistemas de control y accesorios pequeños. Bajo pruebas, el prototipo cumplió con los requisitos establecidos; el peso era de 450 lb, lo que permitía 380 lb para los dos tripulantes; era fácil de volar, con su carga alar relativamente baja y su baja tasa de descenso, podía girar con fuerza. Era bueno para ascender en condiciones térmicas ligeras, y muy estable. Un aspecto negativo es que no podía girar bien en altas velocidades [14].

Figura 2.10: Estructura *Schweizer SGU 2-22*.



*Fuente: Autores.*

La fabricación comienza en mayo de 1946 estableciendo un récord en vuelo de planeadores de dos asientos de 10 horas y 9 minutos. En 1957 la Fuerza Aérea adquiriere el *SGU 2-22A* para su entrenamiento con una nariz más larga, equipado con paracaídas y un peso total de 900 lb siendo el modelo *SGU 2-22B* la versión civil. El *SGU 2-22C* tenía alerones más estrechos, lo que redujo la fuerza de control sin reducir su efectividad. En 1963 se hicieron modificaciones adicionales en el asiento, con una cabina más grande, un panel transparente para una mejor visión y espacio, se introdujo un nuevo patín, ya que el diedro y la posición del ala causaban fracturas en aterrizajes. Este nuevo modelo se conoció como el *SGU 2-22E*, y se construyeron ochenta y siete, más doce de la versión del kit, *SGU 2-22EK*. El *SGU 2-22* pocas veces estuvo involucrado en accidentes, pero nunca fueron por fallas en el diseño, sino por descuidos humanos, más de 200 ejemplares permanecieron activos en 1983, un buen número de ellos aún volaban en 1996 [14].

## 2.6 Estabilidad

La estabilidad es la característica principal que posee una aeronave para explicar su comportamiento en vuelo. Existen dos tipos de estabilidad: Estabilidad estática y Estabilidad dinámica. Se suele estudiar cada una por separado, pero la realidad es que la estabilidad dinámica y estabilidad estática son inseparables y se deben estudiar juntas. Así la estabilidad estática se interpreta como la descripción de la tendencia de una aeronave para orientarse a su condición inicial de equilibrio debido a una perturbación. La estabilidad dinámica describe la trascendencia de un movimiento involucrado en la recuperación del equilibrio debido a una perturbación. Para una aeronave es importante poseer ambos tipos de estabilidad estática y dinámica con el objetivo de ser segura en vuelo. Sin embargo, el grado de estabilidad es dado en muchos casos por la efectividad de los controles y la misión para cual es diseñada la aeronave [5].

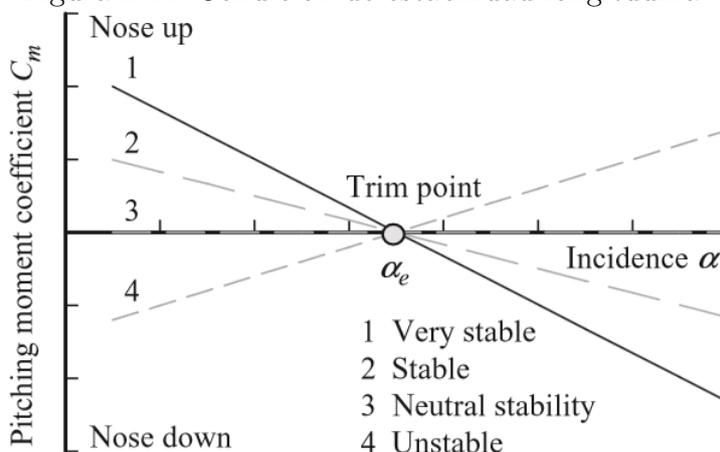
### 2.6.1 Estabilidad estática

#### Estabilidad estática longitudinal

En la estabilidad estática longitudinal consideramos primordiales las acciones del piloto por medio del elevador para balancear la aeronave cuando esta lo requiera. Particularmente, el desplazamiento del control está determinado por la estabilidad de controles fijos, y la fuerza ejerce del control esta determinada por la estabilidad a controles libres. Así, para una aeronave estáticamente estable, el margen de estabilidad  $K_n$  es positivo y la posición del centro gravedad  $h$  estará delante de punto neutro de controles fijos  $h_n$ , siendo determinados con respecto el centro de gravedad. El límite del margen delantero corresponde al punto neutro de controles fijos, mientras que el límite trasero es determinado por el margen de estabilidad máximo permitido. Dentro del trabajo de balanceo total, se asume que el piloto siempre mantiene los controles en el ángulo del elevador requerido y la potencia suficiente para garantizar el nivel de vuelo, donde en muchos casos será necesario variar los controles a nuevas posiciones para nuevos estados de balanceo. Por lo tanto, la estabilidad estática se deduce fácilmente desde un momento de cabeceo restauradora a una condición inicial de equilibrio. Esta condición de estabilidad estática longitudinal se determina trazando el coeficiente de momento de cabeceo  $C_m$ , para la variación en la incidencia  $\alpha$ , figura 2.11. La explicación física está en que la perturbación aumenta la incidencia y lleva a la aeronave a un punto fuera de equilibrio donde el coeficiente del momento se vuelve negativo y, por lo tanto, se está restaurando. Claramente, una perturbación de nariz abajo lleva a la misma conclusión. De esta forma, la aeronave es estable cuando la pendiente de esta gráfica es negativa siendo expresada como [5]:

$$\begin{aligned} \frac{dC_m}{d\alpha} &< 0 \\ \frac{dC_m}{dC_{L_w}} &< 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Figura 2.11: Condición de estabilidad longitudinal.



Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

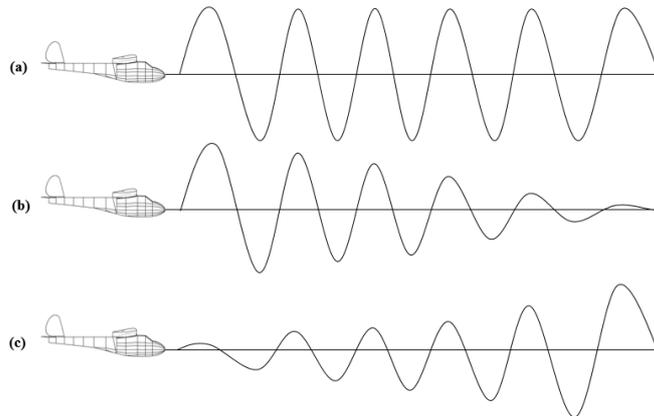
El momento de restauración disminuye a medida que el grado de estabilidad se reduce y se convierte en cero para una estabilidad neutral. Cuando la aeronave no está estable, el signo positivo se muestra. De ello se deduce, entonces, que los márgenes de estabilidad determinan la magnitud de las acciones de control necesarias para estabilizar la aeronave.

### Estabilidad estática lateral-direccional

La estabilidad estática lateral-direccional normalmente se fija desde el diseño y, por lo general, permanece más o menos constante. Esta situación puede descomponerse cuando se considera una maniobra de gran amplitud, donde el comportamiento aerodinámico normalmente lineal puede volverse no lineal y causar cambios dramáticos en las características. Se considera que una aeronave es estable estáticamente en el eje lateral-direccional cuando la fuerza lateral total y los momentos totales de balanceo y guiñada son cero. Esta condición se cumple cuando una aeronave es geoméricamente simétrica, coincidiendo que en un desarrollo de vuelo los márgenes de estabilidad estática permanecerán constantes de manera que no significarán una alteración. De esta forma, los factores determinantes serán el efecto del ángulo diedro  $\Gamma$ , el ángulo de flechamiento  $\Lambda_{1/4}$  y las contribuciones hechas por el estabilizador vertical. Cada factor tiene sus ventajas y desventajas, donde desde el diseño se puede llegar a dar una configuración ideal bajo requerimientos del tipo de aeronave y la categoría de fase de vuelo que esta pueda alcanzar [5]. Por otro lado, la estabilidad se puede evaluar desde la capacidad de mantener el nivel de vuelo en maniobras de balanceo como:

$$\frac{dC_l}{d\beta_{fin}} < 0 \quad (2.17)$$

Figura 2.12: Tipos de estabilidad dinámica.



Fuente: Autores.

## 2.6.2 Estabilidad Dinámica

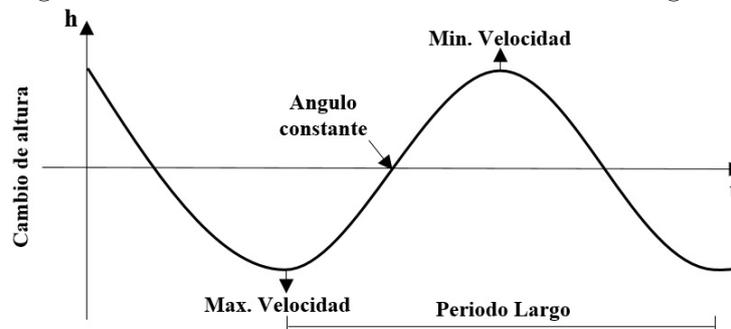
La estabilidad dinámica puede ser: neutra (a), positiva (b) y negativa (c), figura 2.12. Los modos son producidos debido a perturbaciones por entradas de controles, cambios de potencia, cambios estructurales e influencias atmosféricas cuantificados en tiempo, tasas de amortiguación  $\zeta$  y frecuencias naturales  $\omega$  [4].

### Modos de estabilidad dinámica en el eje Longitudinal

#### Modo Fugoide:

El modo fugoide es una oscilación de baja frecuencia, ligeramente amortiguada, debido a la velocidad axial fija al ángulo de cabeceo y un cambio de altitud. La incidencia de ala ( $\alpha_w$ ) permanece constante durante la perturbación limitando el modo al movimiento longitudinal, con magnitudes de cambios de incidencia y tasas de cabeceo muy pequeñas. Típicamente, la frecuencia natural ( $\omega_p$ ) está en el rango de  $0.1 \text{ rad/s}$  a  $1 \text{ rad/s}$  y la relación de amortiguamiento ( $\zeta_p$ ) es muy baja. Sin embargo, las características de amortiguación pueden verse sustancialmente influidas por efectos de los motores, si los hay [5].

Figura 2.13: Desarrollo del movimiento modo fugoide.



Fuente: Autores.

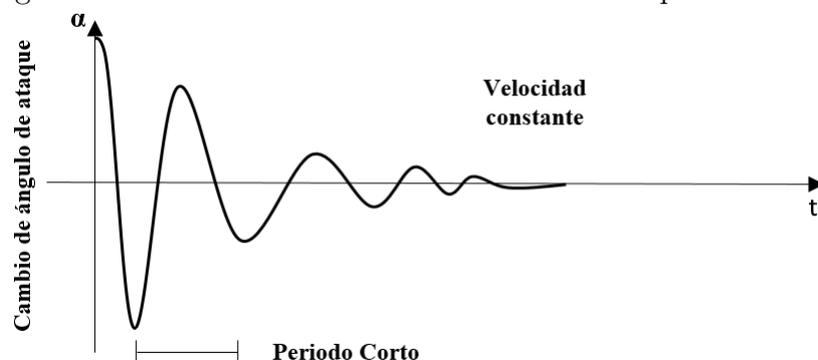
Considerando la figura 2.13, inicialmente en vuelo recto y nivelado con una velocidad  $V_0$ , donde la sustentación y el peso son iguales. Si permitimos que la velocidad disminuya en su componente  $u(t)$ , se reflejará una perturbación por la disminución de la sustentación, provocando pérdidas de altura variando el ángulo de cabeceo en dirección negativa. Siendo así, aumentará la velocidad, y por lo tanto, la componente de sustentación volverá a ser igual o mayor que la componente de peso, lo que se manifestaría en un ascenso volviendo al estado inicial de vuelo recto y nivelado. La maniobra de restauración del modo fugoide se visualizará como una sinusoidal hasta lograr su estado de equilibrio. La configuración de ala principal, el estabilizador horizontal, la combinación del efecto diedro y la posición sobre el fuselaje del ala principal determinará el tiempo de recuperación del modo [5].

**Modo de periodo corto:**

El modo de período corto es una oscilación amortiguada del ángulo  $\theta$  sobre el eje OY visualizada como una sinusoidal de segundo orden sobre la incidencia del ala ( $\alpha(w)$ ), variando la tasa de cabeceo y la actitud del ángulo  $\theta$ . Normalmente, la frecuencia natural ( $\omega_s$ ) está en el rango de 1 *rad/s* a 10 *rad/s* y la relación de amortiguamiento ( $\zeta_s$ ) a menudo es inferior a lo deseado. La velocidad es casi constante en  $u(t)$ , donde los efectos de inercias y de momentos, hacen que sea despreciable [5].

La interpretación física es un sistema amortiguado de masa-resorte sobre el eje OY. En una perturbación del ángulo  $\theta$  desde un estado de equilibrio el efecto resorte produce un momento de restauración, dando lugar a una oscilación de cabeceo, figura 2.14. Los efectos de amortiguamiento no son mecánicos sino son producidos por la configuración aerodinámica, donde no necesariamente brindará efectos de estabilización. Sin embargo, se asume que la rigidez y los efectos de amortiguación están dominados por la contribución aerodinámica del estabilizador horizontal dada la tendencia a alinearse con la dirección del flujo de aire. La dinámica total depende no solo del estabilizador horizontal, sino también de magnitudes adicionales de otros componentes de la estructura, cuando la estabilidad total es marginal, las contribuciones adicionales se tienen en cuenta dificultando identificar y cuantificar los principales restauradores del modo [5].

Figura 2.14: Desarrollo del movimiento modo de periodo corto.



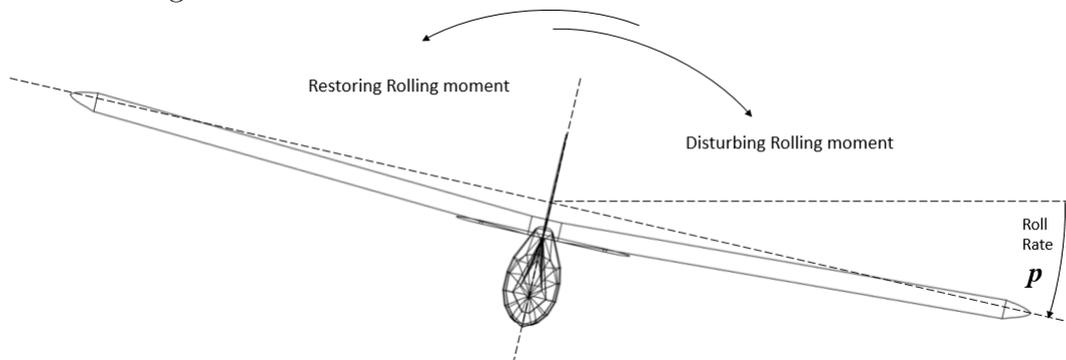
Fuente: Autores.

## Modos de estabilidad dinámica en el eje Lateral-Transversal

### Modo de balanceo:

El modo de balanceo es una característica no oscilatoria que se manifiesta como un retraso en el movimiento de balanceo. Suponiendo restricción al movimiento sobre el eje  $OX$ , en condiciones iniciales de vuelo recto y nivelado, si se experimenta una perturbación, se producirá una velocidad angular  $\dot{\phi}$  de acuerdo con la segunda ley de movimiento de Newton. Dentro del movimiento, el ala experimenta un componente  $w(t)$ , resultando en un aumento en la incidencia del ala derecha y una pequeña disminución en la incidencia del ala izquierda. La diferencia de sustentación, en cada ala, da lugar a un momento de balanceo restaurador, figura 2.15. De igual forma, el arrastre inducido suele ser pequeño e ignorado donde la velocidad aumentará exponencialmente hasta lograr un equilibrio del momento perturbador, estableciendo una tasa de rotación  $p$  constante. En la práctica, este tipo de comportamiento es transitorio en lugar de continuo, en algunas aeronaves diseñadas para operar en condiciones aerodinámicas no lineales, es posible que las condiciones físicas se descompongan por completo dando como resultado una rápida desviación de la maniobra, seguida por un movimiento lateral de naturaleza peligrosa. Sin embargo, en aeronaves convencionales, el modo se muestra al piloto como un retraso en la respuesta de los controles. El tiempo depende del momento de inercia y de las propiedades aerodinámicas del ala, como: ángulo diedro, ubicación sobre el fuselaje y ángulo de barrido, y suele ser de 1s o menos [5].

Figura 2.15: Desarrollo del movimiento modo de balanceo.



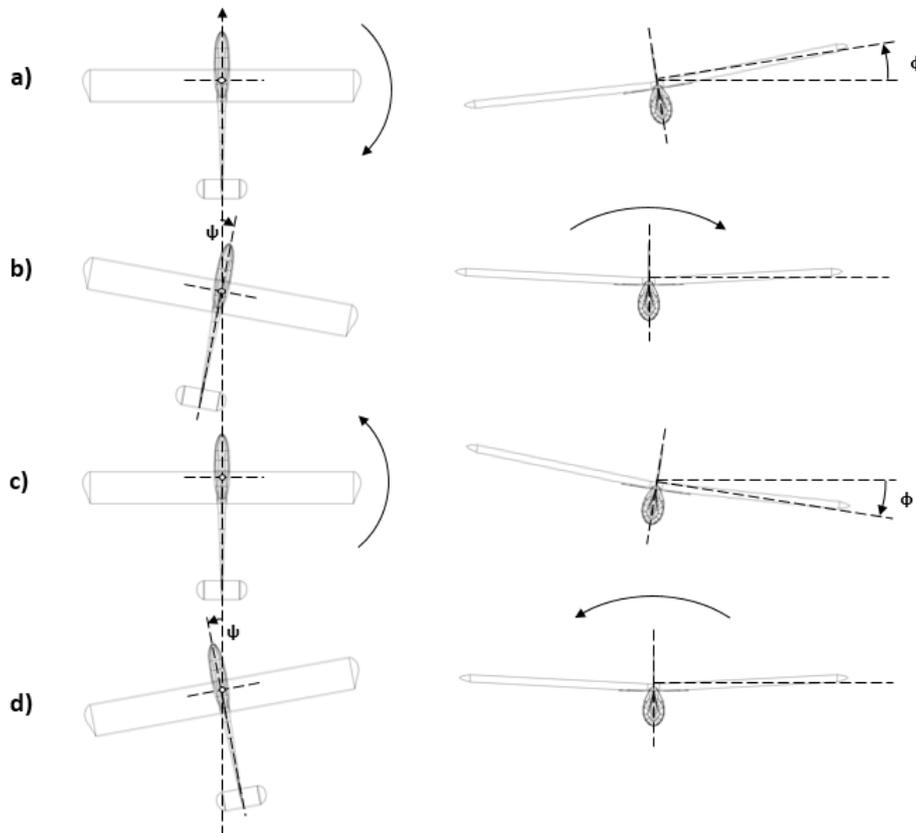
Fuente: Autores.

### Modo de balanceo holandés:

El modo de balanceo holandés es una oscilación amortiguada de guiñada sobre el eje de  $OZ$  acompañado de un balanceo y un deslizamiento lateral, figura 2.16. Fundamentalmente, es el equivalente al modo de período corto, sin embargo, el estabilizador vertical es menos efectivo que el estabilizador horizontal como restaurador, y la amortiguación a menudo es inadecuada. El fenómeno físico está en asumir restricción de guiñada sobre el eje  $OZ$ , por el estabilizador vertical. Por lo tanto, desde una condición de vuelo recto y

nivelado, una perturbación de guiñada hace que la amortiguación produzca un momento de guiñada de restauración en un movimiento oscilatorio clásico. Sin embargo, la velocidad relativa del aire sobre el ala izquierda y derecha da lugar a una perturbación debido a la diferencia en la elevación y arrastre inducido, produciendo una oscilación en el balanceo con una diferencia de fase entre el movimiento de guiñada y balanceo. En consecuencia, la manifestación del modo de balanceo holandés viene dada por la trayectoria elíptica de las alas en relación con el horizonte, donde el balanceo conduce a un movimiento de deslizamiento lateral, aunque la velocidad de deslizamiento es generalmente pequeña. Tanto la amortiguación, como la rigidez, están determinadas por el estabilizador vertical, siendo una gran envergadura la mejor opción para un modo estable. Desafortunadamente, esto contradice el requisito de un modo de espiral estable. El compromiso del diseño resulta en una aeronave con un modo espiral ligeramente inestable y un modo de balanceo holandés mal amortiguado. Por supuesto, la dinámica asociada al modo sugiere que deben haber otras contribuciones aerodinámicas, además del estabilizador vertical, las cuales generalmente sean significativas. Sin embargo, es muy difícil cuantificar todas las contribuciones aerodinámicas con algún grado de exactitud [5].

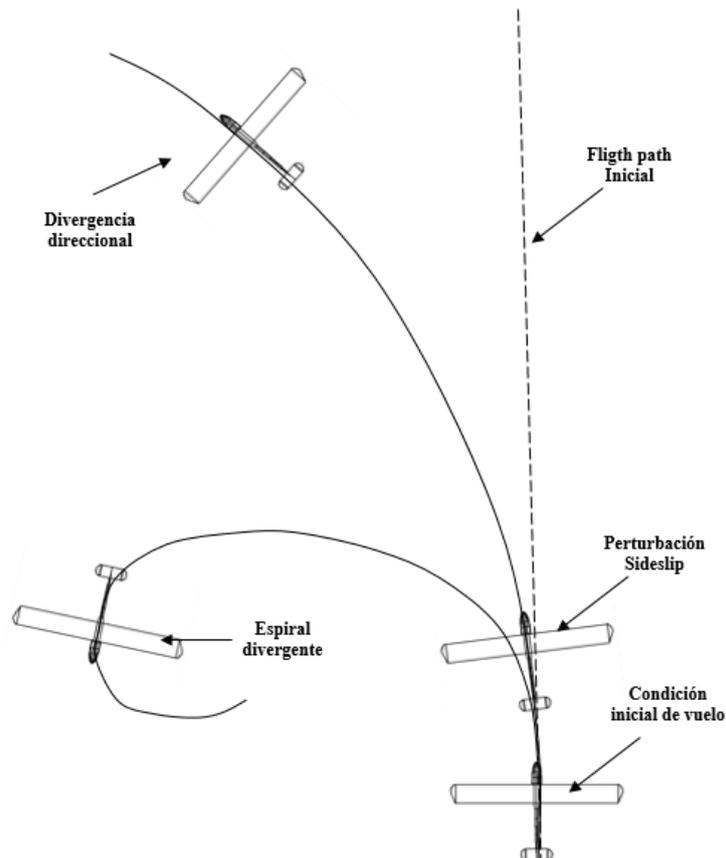
Figura 2.16: Desarrollo del movimiento modo de balanceo holandés.



Fuente: Autores.

**Modo Espiral:**

Figura 2.17: Desarrollo del movimiento modo espiral.



*Fuente: Autores.*

El modo espiral es no-oscilatorio, lento, con movimientos de balanceo, guiñada y deslizamiento lateral. Sus características se deben a la estabilidad estática lateral-direccional debido a una perturbación en el deslizamiento lateral junto a un balanceo que hace que el ala descienda. Suponiendo una condición de vuelo recto y nivelado, una perturbación genera un ángulo de balanceo resultando en una velocidad de deslizamiento lateral variando la incidencia del estabilizador vertical, que por su componente de sustentación, genera un momento de guiñada en dirección del deslizamiento lateral, donde esta diferencia de sustentación a lo largo de la envergadura del ala, da lugar a un momento de balanceo que hace que el ala descienda aún más, figura 2.17. Simultáneamente, el efecto del ángulo diedro y el estabilizador vertical generan un momento de restauración devolviendo el ala a una actitud nivelada dentro de los 100 segundos o más. Típicamente, los requisitos de estabilidad estática obligan que si el efecto diedro es mayor, el modo es estable siendo el ala lenta para recuperar una actitud de equilibrio permitiendo a los pilotos poder afrontarlo; si el efecto del estabilizador vertical es mayor, el modo es inestable. Cuando es

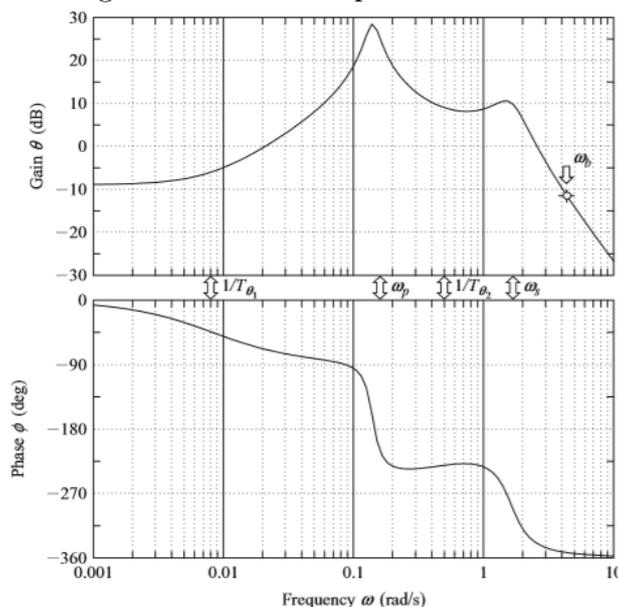
neutral, simplemente se vuela en una maniobra de balanceo constante. En consecuencia, se permite un modo inestable siempre que su constante de tiempo sea grande debido a que es muy lento para desarrollar aceleraciones, siendo insignificanamente pequeñas. Así, las señales visuales se convierten en las ayudas más importantes para el piloto donde el movimiento de balanceo es una condición de vuelo, mientras que en un espiral el descenso no controlado del ala es algo habitual [5].

## 2.7 Diagramas de análisis de estabilidad

### 2.7.1 Diagrama de Bode

El diagrama de Bode es una herramienta para el análisis y diseño de sistemas de control lineales <sup>(8)</sup>. En caso de ausencia de una computadora, se puede bosquejar por la aproximación de magnitud y fase con segmentos, donde le cruce de ganancia, el curva de fase, el margen de ganancia y el margen de fase se determinaran fácilmente [12].

Figura 2.18: Diagrama Bode en respuesta de actitud de cabeceo.



*Fuente: Cook, M. V. (2012). Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control. Butterworth-Heinemann.*

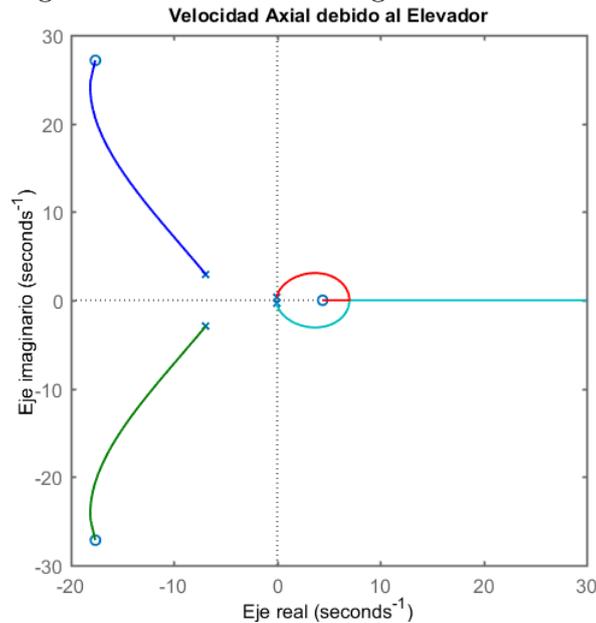
El diagrama de Bode comprende dos gráficos, el gráfico de ganancia y el gráfico de fase representadas contra  $\log_{10}(\omega)$ , figura 2.18. En la gráfica de ganancia en decibelios dB, el margen es positivo y el sistema es estable si la magnitud tiende al cruce de fase negativo.

<sup>8</sup>[15] Un sistema es lineal si la salida sigue fielmente los cambios producidos en la entrada. En la mayoría de los sistemas de control lineales, la salida sigue la misma forma de la entrada, pero en los casos que la salida no verifique la misma forma de la entrada, para ser considerado un sistema lineal, la salida deberá reflejar los mismos cambios generados en la entrada.

Si el margen se mide arriba de 0 dB, el margen será negativo, y el sistema inestable. En la gráfica de fase en grados, el margen es positivo y el sistema estable si la fase es mayor que -180 grados en el cruce de ganancia. Si el margen de fase se mide abajo del eje de -180 grados, el margen es negativo, y el sistema inestable [12].

## 2.7.2 Gráfico del lugar de las raíces

Figura 2.19: Gráfico del lugar de las raíces.



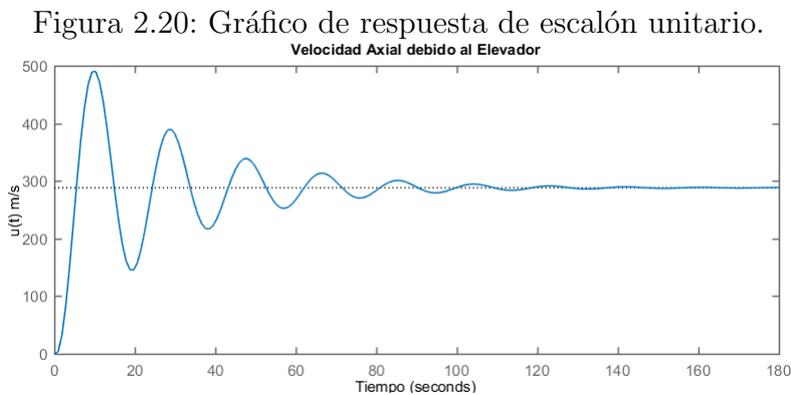
Fuente: Autores.

En una función de transferencia las raíces son dadas por el símbolo X y los ceros por el símbolo O dentro del gráfico del plano  $s$ . Los ceros hacen referencia al valor para  $s$  donde el numerador es cero; las raíces son el valor para  $s$  donde el denominador es cero. Al representar en un plano  $s$  la raíces y ceros, brindamos un análisis cualitativo del estado de una función de transferencia bajo sus ganancias posibles. El gráfico del lugar de las raíces permite determinar información detallada sobre la estabilidad de un sistema dinámico mostrando las raíces, o polos, con la ganancia de realimentación en un plano  $s$ , obligando a una correcta interpretación conociendo sus limitaciones, especialmente cuando se utiliza para evaluar el aumento del control y estabilidad, figura 2.19. Las raíces estables tienen partes reales negativas y se encuentran en la mitad izquierda del plano  $s$ ; las raíces inestables tienen partes reales positivas y se encuentran en la mitad derecha del plano  $s$  y las raíces que describen la estabilidad neutral tienen cero partes reales y se encuentran en el eje imaginario. Las raíces complejas se encuentran en la mitad superior del plano  $s$ , sus conjugados se encuentran en la mitad inferior del plano  $s$  y, dado que sus ubicaciones se reflejan en el eje real, es habitual que solo se muestre la mitad superior del plano. Las raíces complejas describen el movimiento oscilatorio, por lo que se encuentran en el plano

s y no en el eje real. Las raíces que se encuentran en el eje real describen movimientos no oscilatorios cuyas constantes de tiempo están dadas por  $T = 1/\sigma$ . Por lo tanto, una raíz que se encuentra en el origen es neutralmente estable y tiene una constante de tiempo infinita. A medida que las raíces reales se alejan del origen, sus constantes de tiempo disminuyen, en el sentido estable en el semiplano izquierdo y en el sentido inestable en el semiplano derecho [5].

### 2.7.3 Gráfico de respuesta de escalón unitario

La respuesta de escalón unitario calcula la salida temporal de una función transferencia asumiendo un estado inicial de cero, permitiendo conocer el tiempo de respuesta de la señal para alcanzar su estado estacionario en forma de frecuencia por medio de un gráfico de amplitud contra tiempo en segundos, figura 2.20 [16].



Fuente: Autores.

## 2.8 Normas de cualidades de vuelo

Las normas de cualidades de vuelo son requisitos técnicos promulgados por las autoridades hacia las aeronaves y su operación englobando requerimientos relativos de aeronavegabilidad, operaciones, mantenimiento y tripulación. En general tienen un doble objetivo: obtener un nivel adecuado de seguridad de la aeronave durante su operación, y garantizar que no hayan limitaciones en la capacidad de llevar a cabo la misión para la cual ha sido diseñada. El primero tiene más peso en aeronaves civiles y el segundo en aeronaves militares [4].

Las cualidades de vuelo determinan la opinión del piloto sobre la facilidad de controlar la aeronave y llevar a cabo la misión pretendida en condiciones adecuadas. El concepto engloba tres aspectos: Cualidades de manejo, relacionadas con los desplazamientos y fuerzas sobre los mandos, movimientos de respuesta y psicología, fisiología y ergonomía del piloto; Capacidad de mando, relacionada con la capacidad para efectuar cambios de equilibrio alrededor del centro de gravedad, con el fin de alterar la actitud de vuelo a voluntad del piloto; y Cualidades de confort, relacionadas con las magnitudes y frecuencias lineales y

angulares, presiones, temperatura y humedad en cabina, visibilidad exterior e interior, cantidad y presentación de datos y referencias, niveles de ruido, diseño del asiento, y demás aspectos de psicología, fisiología y ergonomía a las que está sometido el piloto [4].

### 2.8.1 Importancia de la aeronave

En términos de la aeronave la dinámica determina una amplia variación en las características de la estabilidad y control, donde estas pueden ser toleradas dentro de unos rangos aceptables de cualidades de vuelo. Sin embargo, es apropiado que estas cualidades de vuelo sean ajustadas al tipo de aeronave y maniobras llevadas a cabo. De esta forma, los requerimientos de cualidades de vuelo son formulados [5].

#### Clasificación de aeronaves

El tipo de aeronaves es clasificado de acuerdo a la dimensión y peso, cuadro 2.2 [5].

Cuadro 2.2: Clasificación de aeronaves.

<b>Clase I</b>	Aeronaves pequeñas y ligeras.
<b>Clase II</b>	Aeronaves de peso medio, de baja a mediana maniobrabilidad.
<b>Clase III</b>	Aeronaves grandes, pesadas, de baja a mediana maniobrabilidad.
<b>Clase IV</b>	Aeronaves de alta maniobrabilidad.

*Fuente: Cook, M. V. (2012). Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control. Butterworth-Heinemann.*

#### Fase de vuelo

Una misión de vuelo puede ser definida como la secuencia de tareas de pilotaje descritas en fases de vuelo. Las fases de vuelos son agrupadas dentro de tres categorías y cada categoría comprende una variedad de tareas requiriendo cualidades de vuelo similares para una ejecución exitosa, cuadro 2.3 [5].

Cuadro 2.3: Fase de vuelo.

<b>Categoría A</b>	Fases de vuelo no terminales que requieren maniobras rápidas, seguimiento de precisión o control de trayectoria de vuelo preciso.
<b>Categoría B</b>	Fases de vuelo no terminales que requieren maniobras graduales, seguimiento menos preciso y control preciso de la trayectoria de vuelo.
<b>Categoría C</b>	Fases de vuelo terminal que requieren maniobras graduales y control de trayectoria de vuelo de precisión.

*Fuente: Cook, M. V. (2012). Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control. Butterworth-Heinemann.*

#### Niveles de cualidades de vuelo

Los niveles de cualidades de vuelo cuantifican el grado de aceptabilidad de una aeronave en su habilidad de completar una misión de vuelo indicando la gravedad de la carga

de trabajo del piloto, cuadro 2.4. El nivel 1 implica una funcionabilidad de la aeronave al 100 % de su capacidad, logrando una misión de vuelo con aceptable carga de trabajo para piloto. Por lo tanto, en caso de una falla en el fuselaje, motor o sistemas podrían disminuir el grado. Así, entendemos que los niveles dependen del estado de falla de la aeronave la cual es dependiente en la confiabilidad de sus componentes [5].

Cuadro 2.4: Niveles de cualidades de vuelo.

<b>Nivel 1</b>	Cualidades de vuelo adecuadas para la fase de vuelo de la misión.
<b>Nivel 2</b>	Cualidades de vuelo adecuadas para lograr la fase de vuelo de la misión, pero con un aumento en la carga de trabajo del piloto y, o, degradación en la efectividad de la misión.
<b>Nivel 3</b>	Cualidades de vuelo degradado, de tal manera que el avión puede ser controlado, con una efectividad inadecuada de la misión y una alta carga de trabajo para el piloto.

*Fuente: Cook, M. V. (2012). Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control. Butterworth-Heinemann.*

## 2.8.2 Requerimientos de cualidades vuelo y manejo

### Oscilación de cabeceo de periodo corto

El modo de periodo corto se cuantifica en términos de la tasa de amortiguamiento, categoría de la fase de vuelo y del nivel de las cualidades de vuelo, cuadro 2.5 [5].

Cuadro 2.5: Amortiguamiento modo de periodo corto.

<b>Fase de vuelo</b>	<b>Nivel 1</b>		<b>Nivel 2</b>		<b>Nivel 3</b>
	$\zeta_{s_{min}}$	$\zeta_{s_{max}}$	$\zeta_{s_{min}}$	$\zeta_{s_{max}}$	$\zeta_{s_{min}}$
<b>Categoría A</b>	0.35	1.30	0.25	2.00	0.10
<b>Categoría B</b>	0.30	2.00	0.20	2.00	0.10
<b>Categoría C</b>	0.50	1.30	0.35	2.00	0.25

*Fuente: Cook, M. V. (2012). Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control. Butterworth-Heinemann.*

Cuadro 2.6: Control anticipation parameter.

<b>Categoría</b>	<b>A</b>		<b>B</b>		<b>C</b>	
	<b>Min</b>	<b>Max</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>	<b>Min</b>	<b>Max</b>
<b>Nivel 1</b>	0.28	3.6	0.085	3.6	0.16	3.6
<b>Nivel 2</b>	0.16	10.0	0.038	10.0	0.096	10.0
<b>Nivel 3</b>	0.16	-	0.038	-	0.096	-

*Fuente: Tierno, M. Á. G., Cortés, M. P., & Márquez, C. P. (2012). Mecánica del vuelo. Ibergaceta.*

## Fugoide

Las dificultades de manejo pueden ser molestas si  $\omega_p/\omega_s \leq 0,1$  [5].

Cuadro 2.7: Amortiguamiento modo fugoide.

<b>Nivel de cualidades de vuelo</b>	$\zeta_{pmin}$
1	0.04
2	0
3	Inestable, $T_p > 55s$

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

## Modo balanceo

El modo de balanceo describe la dinámica lateral, lo cual es un factor importante en la determinación de las cualidades de manejo laterales, cuadro 2.8 [5].

Cuadro 2.8: Tiempo de modo de balanceo.

<b>Tipo de aeronave</b>	<b>Fase de vuelo</b>	$T_{rmax}$ (segundos)		
		<b>Nivel 1</b>	<b>Nivel 2</b>	<b>Nivel 3</b>
<b>I, IV</b>	A, C	1.0	1.4	-
<b>II, III</b>	A, C	1.4	3.0	-
<b>I, II, III, IV</b>	B	1.4	3.0	-

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

## Modo espiral

Un modo espiral estable es aceptable dependiendo su tiempo de respuesta. Sin embargo, desde que el tiempo de respuesta sea constante, cualquier aeronave en modo espiral daría lugar a un comportamiento dinámico muy lento, no crítico para el manejo a menos que sea muy inestable, cuadro 2.9 [5].

Cuadro 2.9: Tiempo constante del modo espiral.

<b>Fase de vuelo</b>	$T_{smin}$ (segundos)		
	<b>Nivel 1</b>	<b>Nivel 2</b>	<b>Nivel 3</b>
<b>A, C</b>	17.3	11.5	7.2
<b>B</b>	28.9	11.5	7.2

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

## Modo balanceo holandés

El modo de balanceo holandés es modo de periodo corto y tiene una gran influencia en el manejo lateral-direccional, por lo tanto, sus requerimientos de amortiguación y frecuencia son especificados con gran detalle, cuadro 2.10 [5].

Cuadro 2.10: Amortización y frecuencia modo balanceo holandés.

<i>Tipo</i>	<i>Fase</i>	<i>Valores mínimos</i>							
		Nivel 1			Nivel 2			Nivel 3	
		$\zeta_d$	$\zeta_d\omega_d$	$\omega_d$	$\zeta_d$	$\zeta_d\omega_d$	$\omega_d$	$\zeta_d$	$\omega_d$
<b>I, IV</b>	<b>Cat A</b>	0.19	0.35	1.0	0.02	0.05	0.5	0.0	0.4
<b>II, III</b>	<b>Cat A</b>	0.19	0.35	0.5	0.02	0.05	0.5	0.0	0.4
<b>Todas</b>	<b>Cat B</b>	0.08	0.15	0.5	0.02	0.05	0.5	0.0	0.4
<b>I, IV</b>	<b>Cat C</b>	0.08	0.15	1.0	0.02	0.05	0.5	0.0	0.4
<b>II, III</b>	<b>Cat C</b>	0.08	0.10	0.5	0.02	0.05	0.5	0.0	0.4

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

## 2.9 Criterio de Routh-Hurwitz

El criterio de Routh-Hurwitz es un método para determinar la localización de los ceros de un polinomio con coeficientes constantes reales con respecto a los semiplanos izquierdo y derecho del plano  $s$ . Debido a que los programas para encontrar raíces pueden resolver los ceros de un polinomio con facilidad, el valor del criterio de Routh-Hurwitz está limitado a ecuaciones con por lo menos un parámetro desconocido [12].

$$F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.18)$$

Para que la ecuación 2.18 no tenga raíces con partes reales positivas, todos los coeficientes deben tener el mismo signo y ninguno puede ser cero. Así, la condición está en que los determinantes de Hurwitz sean positivos. En donde los coeficientes con índices mayores que  $n$  o negativos deben reemplazarse con ceros.

$$\begin{aligned}
 D_1 &= a_{n-1} \\
 D_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

El primer paso, es arreglar los coeficientes en dos reglones entre pares e impares desde el menor hasta el mayor.

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & \end{array}$$

Luego se arreglan mediante las operaciones indicadas, por ejemplo:

$$a_6s^6 + a_5s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \quad (2.20)$$

$s^6$	$a_6$	$a_4$	$a_2$	$a_0$
$s^5$	$a_5$	$a_3$	$a_1$	$0$
$s^4$	$\frac{a_5a_4 - a_6a_3}{a_5} = A$	$\frac{a_5a_2 - a_6a_1}{a_5} = B$	$\frac{a_5a_0 - a_6 \times 0}{a_5} = a_0$	$0$
$s^3$	$\frac{Aa_3 - a_5B}{A} = C$	$\frac{Aa_1 - a_5a_0}{A} = D$	$\frac{A \times 0 - a_5 \times 0}{A} = 0$	$0$
$s^2$	$\frac{BC - AD}{C} = E$	$\frac{Ca_0 - A \times 0}{C} = a_0$	$\frac{C \times 0 - A \times 0}{C} = 0$	$0$
$s^1$	$\frac{ED - Ca_0}{E} = F$	$0$	$0$	$0$
$s^0$	$\frac{Fa_0 - E \times 0}{F} = a_0$	$0$	$0$	$0$

Completada la tabulación, se analizan los signos de los coeficientes de la primera columna. *Las raíces de la ecuación están en el semiplano izquierdo del plano  $s$  si todos los elementos son del mismo signo. El número de cambios de signos es igual al número de raíces con partes reales positivas o en el semiplano derecho del plano  $s$ .* Por lo tanto, si todos los determinantes de Hurwitz son positivos, los elementos en la primera columna de la tabulación de Routh deberán ser del mismo signo.

# Capítulo 3

## Estado del arte

### 3.1 Estudios a nivel Nacional

- *Diseño detallado de la superficie alar y mecanismos de hipersustentación y control de un Planeador Luftwinger. Henao C. Claudia M. (2007).*[17]

Se optimizó el diseño del planeador Cónдор I desde la superficie alar, envergadura, relación de aspecto y relación de taperado para lograr volar por más tiempo sin depender en su totalidad de condiciones meteorológicas.

- *Diseño estructural detallado del fuselaje de las tesis titulada “Diseño preliminar de un planeador de ala rígida con vuelo controlado”. Pinto G. Oscar F. (2008).*[18]

Se validó y rediseñó estructuralmente el fuselaje del planeador desarrollado en el proyecto “diseño preliminar de un planeador de ala rígida de vuelo controlado” estudiando los requisitos necesarios para obtener la certificación de un planeador con superficies de control.

- *Cálculo Y Diseño Conceptual Y Preliminar De Un Planeador Mono-plaza Tipo Standard Class De Categoría Utilitario. Gómez Barrero, F., Méndez Moreno, Aurelio dir. (2012).*[19]

Se propuso un diseño conceptual y preliminar de un planeador categoría Standard Class presentando una comparación de planeadores por categorías junto con los cálculos y análisis pertenecientes a los aspectos más importantes y relevantes del área exterior del planeador, como una parte de su rendimiento.

- ***Diseño preliminar de un planeador en configuración ala volante con capacidad para una persona. Mejía Giraldo, A., López Ríos, A. A. (2014).***[20]

Se diseñó un ala volante sin propulsión con capacidad para una persona, omitiendo parte del fuselaje y empenaje. El trabajo consistió en investigar el estado del arte y marco teórico. Empleando herramientas computacionales se calcularon fuerzas, momentos aerodinámicos y un análisis estructural seleccionando posibles materiales para definir el concepto final del diseño.

- ***Estudio del rendimiento aerodinámico y de estabilidad sobre la implementación de un ala de envergadura variable para una aeronave tipo planeador de entrenamiento categoría utilitaria. Carranza Vargas, P. M., Chapetón Calderón, A. F. (2015).***[21]

Se estudió el rendimiento aerodinámico y de estabilidad del planeador ATLAS I en una condición de ala extendida y ala retraída durante vuelo de crucero, identificando la estabilidad estática y dinámica.

## 3.2 Estudios a nivel Internacional

- ***On the dynamic longitudinal stability of sailplanes with fixed and free controls. Morelli, P.(1960).***[22]

Se estudió comportamiento oscilatorio longitudinal de un planeador, recalando en la ampliación del estudio para movimientos oscilatorios asimétricos.

- ***Application of nonlinear QFT to flight control design for high AOA maneuvers with thrust vectoring. Rasmussen, S.J.(1991).***[23]

Por medio de la teoría de retroalimentación cuantitativa no lineal (QFT), se diseñó un sistema de control de vuelo (FCS) para un YF-16 de la Fuerza Aérea de Estados Unidos. Para esto, se eligieron maniobras de rango visual deseables durante el combate desarrollando las funciones de transferencia mediante el uso de la identificación del sistema, con variables de tiempo de entrada/salida. Después de identificar las funciones de transferencia, se utilizó la técnica QFT de salida múltiple en cascada de entrada múltiple para diseñar el FCS simulando y controlando el sistema, permitiendo sacar deducciones importantes para el programa de simulación en vuelo.

- ***Longitudinal dynamic of towed sailplane. de Matteis. Guido (1993).***[24]

Se investigó la estabilidad longitudinal de planeadores arrastrados por cable, relacionando la dinámica del cable en un sistema lineal de ecuaciones. Se demuestran fuertes interacciones entre los movimientos de cable, remolque y planeador, conduciendo a situaciones inestables en vuelo.

- ***Stability augmentation of a sailplane in towed flight. De Matteis, G., Tamilia, W. (1993).***[25]

Se diseñó un sistema de control automático para un planeador en vuelo remolcado, cuyo objetivo principal es controlar la posición relativa de remolque y planeador. El movimiento controlado del planeador se simula mediante un modelo dinámico general en los ejes de cuerpo.

- ***Modelización CAD y análisis aerodinámico y estructural del planeador Fauvel AV-22. Borrell Rodríguez, X. (2010).***[26]

Se modeló un planeador mediante una aplicación de diseño asistido por ordenador a partir de sus planos de construcción para efectuar posteriormente un análisis aerodinámico y estructural. De igual forma, se detalla el proceso de modelización del planeador mostrando las técnicas empleadas para la resolución de los distintos problemas particulares que plantea la modelización de un aerodino. También se muestran las estrategias de preparación del modelo obtenido para una simulación computacional, tanto aerodinámica como mecánica. Finalmente, se proponen modificaciones al proceso de construcción del planeador como conclusión de los resultados obtenidos.



# Capítulo 4

## Marco legal

- **RAC-22. Estándares de aeronavegabilidad: planeadores y moto planeadores.**[27]

Adaptación para Colombia, por parte de la UAEAC, de la norma CS-22 del Reglamento EC 1592/2002 de la Agencia Europea de Seguridad Aérea (EASA).

- **RAC-45. Identificación de aeronaves y componentes de aeronaves.**[13]

Identificación de aeronaves, motores y hélices que son fabricados bajo los términos de un “certificado de tipo” o de un “certificado de producción”. Adaptación de la Norma LAR 45 sobre Identificación de Aeronaves y Componentes de Aeronaves.

- **CS-22. Certification Specifications for Sailplanes.**[28]

Esta especificación cubre los requisitos de aeronavegabilidad para el diseño de aeronaves livianas de ala fija con o sin motor, planeadores. La estabilidad se muestra mediante una tendencia a que el planeador regrese a un vuelo estable después de: (1) un aumento de velocidad, seguido de una liberación no brusca del cabeceo; y (2) una disminución de la velocidad, seguido de una liberación no brusca del cabeceo. Los requisitos de resistencia se especifican en términos de factor de cargas límite y cargas finales.

- **MIL-STD-1797A. Flying Qualities of Piloted Aircraft.**[29]

Esta norma contiene los requisitos de cualidades de vuelo y manejo. Su objetivo es garantizar las cualidades de vuelo para un rendimiento adecuado de la misión y la seguridad de vuelo independientemente de la implementación del diseño o el aumento del sistema de control de vuelo. Los requisitos de esta norma se aplican durante el diseño, construcción, prueba y aceptación de la aeronave.

- **MIL-F-8785C. Flying Qualities of Piloted Airplanes.**[\[30\]](#)

Esta especificación contiene los requisitos para las cualidades de vuelo y manejo, en vuelo y en tierra, de los aviones militares, tripulados y pilotados de EE.UU. Su objetivo es garantizar cualidades de vuelo que proporcionen un rendimiento adecuado de la misión y seguridad de vuelo independientemente de la implementación del diseño o la mecanización del sistema de control de vuelo. La estructura de la especificación permite su uso para guiar estos aspectos en las compensaciones, los análisis y las pruebas de diseño.

- **DEF-STAN 00-970. Design and Airworthiness Requirements for Service Aircraft**[\[31\]](#)

Esta norma proporciona requisitos para la certificación de aeronavegabilidad y diseño para el desarrollo y prueba de aviones de ala fija en operaciones militares en el Reino Unido.

- **NATO-STANAG-4671. UAV Systems Airworthiness Requirements for North Atlantic Treaty Organization (NATO) Military UAV Systems.**[\[32\]](#)

Este documento contiene un conjunto de requisitos técnicos de aeronavegabilidad destinados principalmente a la certificación de aeronavegabilidad de los sistemas UAV militares de ala fija con un peso máximo de despegue de entre 150 y 20,000 kg. Estos requisitos representan los requisitos mínimos aplicables para cumplir con los objetivos de seguridad definidos.

# Capítulo 5

## Problemática

### 5.1 Planteamiento del problema

La efectividad de una maniobra aérea es influenciada por la configuración estructural y aerodinámica junto con aspectos de rendimientos y potencia, siendo reducida por factores como una mala visibilidad exterior e interior, mala presentación de datos y referencias, exceso de ruido, diseño inadecuado del asiento, temperatura, humedad y el exceso de fuerzas sobre los mandos en la cabina, dificultando la capacidad en vuelo a voluntad de mantener una trayectoria por parte del piloto. De igual forma, el exceso de cargas perjudicarían la estructura, relacionando magnitudes lineales y angulares, de velocidad y aceleración, sometiendo al piloto y a la aeronave a grandes presiones con respuestas negativas en la psicología, fisiología y ergonomía del vuelo. De esta forma, el problema a abordar está en las deficiencias en el régimen de vuelo, categoría y fase de vuelo de una aeronave para aumentar o disminuir sus cualidades de vuelo y manejo.

### 5.2 Justificación

Las cualidades de vuelo y manejo son parámetros primordiales para la certificación de cualquier aeronave. Por lo tanto, conocerlas e interpretarlas es útil para cualquier ingeniero en cada fase de diseño. Aunque se han realizado importantes estudios, muchos con métodos lineales y otros más complejos con métodos no lineales, es pertinente avanzar en el tema, ya que desde los estudios hechos en diseño o fabricación de aeronaves, la estabilidad dinámica y estática se abarca desde programas especializados por razones de disminución de costos y tiempo. La oportunidad de implementar este estudio, con cálculos aproximados a un modelo real, podría abrir la puerta a nuevos conceptos y énfasis en el uso de herramientas adquiridas, mejorando la experiencia académica exponiendo las cualidades de vuelo y manejo como norma reguladora con su aplicación directa. Para el sector aeronáutico es de gran provecho cada concepto planteado con sus resultados para generar la inclusión a mediano plazo de la construcción de aeronaves u objetos voladores para

uso institucional o civil, abriendo las puertas a políticas de estado encaminadas en crear modelos y metodologías de análisis de las características de estabilidad y maniobrabilidad en aeronaves. Y así finalmente, difundir nuevos desarrollos para la industria aeronáutica y aeroespacial nacional e internacional.

### **5.3 Alcance**

Este trabajo de grado mostrará el análisis de las cualidades de vuelo y manejo para una aeronave tipo planeador sin motor con respecto a su categoría y fase de vuelo en régimen de vuelo subsónico, despreciando efectos de compresibilidad del aire, efectos de espesor de perfil y sus ángulos de ataque, sustentados en un modelo lineal de ecuaciones. Así, se expondrán los parámetros geométricos, de peso, balance y rendimiento con respecto a los datos suministrados por manual de mantenimiento, certificado tipo y fuentes externas mientras sea posible. No se entregará prototipo, ni análisis en túnel viento, donde se asume que no hay sistemas de control automático de estabilidad. En Cada maniobra de perturbación se entiende que el piloto mantendrá controles firmes en una dirección recta y a nivel. Finalmente, los cálculos serán realizados en *MatLab*<sup>®</sup> en forma de modelo matemático bajo una base de datos creada a partir de datos geométricos y resultados aerodinámicos a partir de análisis hechos en *XFLR5*<sup>®</sup>.

### **5.4 Pregunta de investigación**

¿Cómo influyen los factores de estabilidad en las cualidades de vuelo y manejo de una aeronave en régimen subsónico?

# Capítulo 6

## Objetivos

### 6.1 Objetivo general.

- Realizar un estudio de las cualidades de vuelo y manejo de una aeronave tipo planeador para instrucción.

### 6.2 Objetivos específicos.

- Plantear el modelo dinámico para calcular el estado de equilibrio longitudinal en condiciones de vuelo subsónico.
- Determinar las derivadas de estabilidad y control aerodinámico en el eje longitudinal y eje lateral-direccional para calcular las respuestas en controles aerodinámicos.
- Establecer los modos de oscilación característicos en el eje longitudinal y eje lateral-direccional para realizar el análisis de acuerdo a los requerimientos de las cualidades de vuelo y manejo estandarizados.



# Capítulo 7

## Metodología

Para la consecución de los objetivos propuestos en el estudio de las cualidades de vuelo y manejo de una aeronave tipo planeador se abarcó de forma hipotético-deductiva la metodología, dividiéndola en tres fases de trabajo:

### Primera fase

A partir del planeador *Schweizer SGU 2-22* se obtendrán los datos técnicos y geométricos para realizar los cálculos de estimación de peso, balance, inercias y factor de carga. Bajo el rango de velocidades permitidas por el diagrama  $v-n$  calculado, se realizará un análisis aerodinámico en  $XFLR5^{\text{®}}$  para crear una base de datos con información geométrica y aerodinámica, y así, calcular las condiciones de equilibrio por cada velocidad permitida, desde un estado de vuelo recto y nivelado.

### Segunda fase

Se identificarán los ejes y fuerzas actuantes del sistema, donde con las cifras de la condición de equilibrio y la base de datos, se calcularán las derivadas de estabilidad y control aerodinámico adimensionales, dimensionales y en términos reducidos en el eje longitudinal y lateral-direccional. De esta forma, se brindará solución y linealización a las ecuaciones de movimiento para determinar las funciones de transferencia por cada eje. Con cada función de transferencia se calcularán las respuestas por variables de perturbación y aceleración en controles aerodinámicos, permitiendo llegar a determinar las componentes lineales de velocidad total y la tasa de cambio de altitud por perturbaciones de movimiento.

### Tercera fase

Habiendo determinado todas las funciones de transferencia, se identificarán las respuestas de estabilidad dinámica con sus modos de oscilación, y estabilidad estática con los rangos máximos en controles fijos por cada velocidad permitida, para con ello, realizar el análisis de acuerdo a los requerimientos de las cualidades de vuelo y manejo.



# Capítulo 8

## Desarrollo

### 8.1 Cálculo de condición de equilibrio

A partir de la revista *Sailplanes by Schweizer History* [14], certificado tipo G-18 [33] y manual de mantenimiento [34] del planeador *Schweizer SGU 2-22* se identificaron los datos técnicos para modelar en *SolidWorks*<sup>®</sup> facilitando la interpretación de las dimensiones más relevantes para el estudio, apéndice A-A.1.

#### 8.1.1 Estimación de Peso

##### Ala principal

Referenciando los datos del cuadro A.2 y A.5, apoyados del libro [35]:

$$W_w = S_w \cdot \bar{c} \cdot \left(\frac{t}{c}\right)_{max} \cdot \rho_{mat} \cdot K_{\rho_{wing}} \cdot \left(\frac{AR \cdot n_{ult}}{\cos \Lambda_{0,25}}\right)^{0,6} \cdot \lambda^{0,04} \cdot g \quad (8.1)$$

$$W_w = (19,51m^2)(1,524m)(0,1207)(2711kg/m^3)(0,0011) \left(\frac{8,816,45}{\cos(0)}\right)^{0,6} (1)^{0,04} (9,81m/s^2)$$

$$W_w = 1186,36N$$

$$m_w = 120,93kg = 266,61lb$$

##### Empenaje

##### - Estabilizador horizontal

Referenciando los datos del cuadro A.4 y A.5, apoyados del libro [35]:

$$W_{HT} = S_{HT} \cdot \bar{c}_{HT} \cdot \left(\frac{t}{c}\right)_{max_{HT}} \cdot \rho_{mat} \cdot K_{\rho_{HT}} \cdot \left(\frac{AR_{HT}}{\cos \Lambda_{0,25_{HT}}}\right)^{0,6} \cdot \lambda_{HT}^{0,04} \cdot \bar{V}_T^{0,3} \cdot \left(\frac{C_e}{C_t}\right)^{0,4} \cdot g \quad (8.2)$$

$$W_{HT} = (1,92m^2)(0,8855m)(0,09) \cdot (2711kg/m^3)(0,022) \left(\frac{2,9}{\cos(0)}\right)^{0,6} (1)^{0,04} (0,33)^{0,3}$$

$$(0,4589)^{0,4}(9,81m/s^2)$$

$$W_{HT} = 89,02N$$

$$m_{HT} = 9,07kg = 20lb$$

### - Estabilizador vertical

Referenciando los datos del cuadro A.3 y A.5, apoyados del libro [35]:

$$W_{VT} = S_{VT} \cdot \bar{c}_{VT} \cdot \left( \frac{t}{c} \right)_{max_{VT}} \cdot \rho_{mat} \cdot K_{\rho_{VT}} \cdot \left( \frac{AR_{VT}}{\cos \Lambda_{0,25_{VT}}} \right)^{0,6} \cdot \lambda_{VT}^{0,04} \cdot \bar{V}_F^{0,2} \cdot \left( \frac{C_r}{C_{VT}} \right)^{0,4} \cdot g \quad (8.3)$$

$$W_{VT} = (1,21m^2)(0,93m)(0,09)(2711kg/m^3)(0,067) \left( \frac{3,23}{\cos 13,74} \right)^{0,6} (28,7)^{0,04} (0,021)^{0,2}$$

$$(0,5218)^{0,4}(9,81m/s^2)$$

$$W_{VT} = 152,16N$$

$$m_{VT} = 15,51kg = 34,2lb$$

### - Masa total empenaje

$$m_E = m_{HT} + m_{VT}$$

$$m_E = 20lb + 34,2lb = 54,2lb$$

Cuadro 8.1: Comparación de cálculos de peso.

		<i>Aprx 1 (Lb)</i>	<i>Aprx 2 (Lb)</i>	<i>Real (Lb)</i>	<i>Cálculos (Lb)</i>
<b>30 %</b>	<b>Ala</b>	261	270	280.25	266.61
<b>25 %</b>	<b>Fuselaje</b>	200.1	207	214.25	222.69
<b>3 %</b>	<b>Tail-Fin</b>	43.5	45	46.708	34.2
					20
<b>2 %</b>	<b>llanta</b>	17.4	18	18.68	17
<b>60 %</b>	<b>Masa</b>	522	540	560.5	560.5

## 8.1.2 Cálculo del balance

Asumiendo carga paga por los pilotos 1 y 2, con una masa total de 145 kg; y simetría sobre el eje Y a razón que no hay fuerzas puntuales sobre el eje lateral que varíen el balance del centro de gravedad.

### Centro de gravedad eje Y

$$y_{c.g} = 0$$

### Centro de gravedad eje X

El centro de gravedad es ubicado a **0.3901 m** del borde de ataque del ala principal, ó **2.2029 m** de la punta del planeador.

Cuadro 8.2: Centro de gravedad eje X.

	<i>Ubicación</i>	<i>Masa</i>	<i>Momento</i>
<b>Piloto 1</b>	-0.58 m	75 kg	-43.8 kg*m
<b>Piloto 2</b>	0.20 m	70 kg	14.2 kg*m
<b>Planeador</b>	0.72 m	254.2 kg	185.3 kg*m
		399.2 kg	155.7 kg*m

### Centro de gravedad eje Z.

El centro de gravedad es ubicado a **0,4846 m** sobre el eje *OZ*.

Cuadro 8.3: Centro de gravedad eje Z.

	<i>Ubicación</i>	<i>Masa</i>	<i>Momento</i>
<b>Pilotos</b>	0 m	145 kg	0 kg*m
<b>Planeador</b>	0.77 m	246.5 kg	190.3 kg*m
<b>Rueda</b>	0.40 m	7.71 kg	3.13 kg*m
		399.2 kg	193.4 kg*m

### 8.1.3 Cálculo de inercias

El cálculo de inercias se realizó asumiendo alas rectangulares y fuselaje cilíndrico, ecuación 2.5, relacionando datos entre *XFLR5*<sup>®</sup>, *AVL*<sup>®</sup> (1) y cálculos propios para la validación de resultados, cuadro 8.8.

#### Ala principal

Cuadro 8.4: Inercias ala principal.

	<i>XFLR5</i>			<i>Cálculos</i>		
<b>Masa</b>	120.93	kg	$I_x$ 1630.4 kg m <sup>2</sup>	$I_x$ 1731.1	kg	m <sup>2</sup>
$X_{c.g}$	2.4	m	$I_y$ 16.35 kg m <sup>2</sup>	$I_y$ 23.43	kg	m <sup>2</sup>
$Y_{c.g}$	0	m	$I_z$ 1644.2 kg m <sup>2</sup>	$I_z$ 1754.4	kg	m <sup>2</sup>
$Z_{c.g}$	1.04	m	$I_{xz}$ 1,60 kg m <sup>2</sup>			

$$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + t^2) \quad (8.4)$$

$$I_x = \frac{120,93kg}{12}(((13,106m)^2 + ((1,524m)(0,2818)(0,1207))^2) = 1731,0638kgm^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}m(t^2 + \bar{c}^2) \quad (8.5)$$

$$I_y = \frac{120,93kg}{12}(((1,524m)(0,2818)(0,1207))^2 + (1,524m)^2) = 23,4335kgm^2$$

<sup>1</sup>[36] *AVL*<sup>®</sup> es un programa para el análisis aerodinámico y dinámico de vuelo de aeronaves en estados lineales y no lineales.

$$I_z = \frac{1}{12}m(b^2 + \bar{c}^2) \quad (8.6)$$

$$I_z = \frac{120,93kg}{12}((13,106m)^2 + (1,524m)^2) = 1754,44kgm^2$$

### Estabilizador horizontal

Cuadro 8.5: Inercias estabilizador horizontal.

			<b>XFLR5</b>			<b>Cálculos</b>		
<b>Masa</b>	9.07	kg	$I_x$	3.32	kg m <sup>2</sup>	$I_x$	4.21	kg m <sup>2</sup>
$X_{c.g}$	7.41	m	$I_y$	0.36	kg m <sup>2</sup>	$I_y$	0.59	kg m <sup>2</sup>
$Y_{c.g}$	0	m	$I_z$	3.7	kg m <sup>2</sup>	$I_z$	4.8	kg m <sup>2</sup>
$Z_{c.g}$	0.83	m	$I_{xz}$	-0.012	kg m <sup>2</sup>			

$$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + t^2) \quad (8.7)$$

$$I_x = \frac{9,07kg}{12}((2,36m)^2 + ((0,8855m)(0,09)(0,303))^2) = 4,218kgm^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}m(t^2 + \bar{c}^2) \quad (8.8)$$

$$I_y = \frac{9,07kg}{12}(((0,8855m)(0,09)(0,303))^2 + (0,8855m)^2) = 0,593kgm^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}m(b^2 + \bar{c}^2) \quad (8.9)$$

$$I_z = \frac{9,07kg}{12}((2,3622m)^2 + (0,8855m)^2) = 4,81kgm^2$$

### Estabilizador vertical

Cuadro 8.6: Inercias estabilizador vertical.

			<b>XFLR5</b>			<b>Cálculos</b>		
<b>Masa</b>	15.51	kg	$I_x$	1.64	kg m <sup>2</sup>	$I_x$	2.52	kg m <sup>2</sup>
$X_{c.g}$	7.014	m	$I_y$	2.53	kg m <sup>2</sup>	$I_y$	1.12	kg m <sup>2</sup>
$Y_{c.g}$	0	m	$I_z$	0.88	kg m <sup>2</sup>	$I_z$	3.64	kg m <sup>2</sup>
$Z_{c.g}$	1.4	m	$I_{xz}$	-0.2	kg m <sup>2</sup>			

Fuselaje

Cuadro 8.7: Inercias fuselaje.

			<b>XFLR5</b>				<b>Cálculos</b>			
<b>Masa</b>	101.01	kg	$I_x$	2.24	kg	$m^2$	$I_x$	208.02	kg	$m^2$
$X_{c.g}$	3.22	m	$I_y$	360	kg	$m^2$	$I_y$	604.21	kg	$m^2$
$Y_{c.g}$	0	m	$I_z$	357.8	kg	$m^2$	$I_z$	604.21	kg	$m^2$
$Z_{c.g}$	0.38	m	$I_{xz}$	-27.4	kg	$m^2$				

Inercias totales

Cuadro 8.8: Inercias Schweizer SGU 2-22.

			<b>AVL</b>			<b>XFLR5</b>				
<b>Masa</b>	399.24	kg	$I_x$	1762.41	$kgm^2$	$I_x$	1725.031	$kgm^2$	$h_0$	0.25m
$X_{c.g}$	2.203	m	$I_y$	1225.6	$kgm^2$	$I_y$	1187.12	$kgm^2$		
$Y_{c.g}$	0	m	$I_z$	2728.93	$kgm^2$	$I_z$	2727	$kgm^2$	$h$	0.256m
$Z_{c.g}$	0.484	m	$I_{xz}$	-104.4	$kgm^2$	$I_{xz}$	-156.64	$kgm^2$		

8.1.4 Factor de carga y velocidades de maniobra

Relacionando la ley de inercia de Newton, consideramos cargas generadas en maniobras y en virajes coordinados a nivel con ángulos de  $-54,5 \leq \theta \leq 76,58$ .

$$n_{lim(+)} \geq 2,1 + \left( \frac{24000}{G_w + 10000} \right) \tag{8.10}$$

$$n_{lim(+)} \geq 2,1 + \left( \frac{24000}{880,17lb + 10000} \right) \geq 4,3$$

$$n_{lim(-)} \geq 0,4n_{lim(+)} \tag{8.11}$$

$$n_{lim(-)} \geq 0,4(4,3) \geq 1,72$$

$$C_{N_{max(+)}} = \sqrt{C_{L_{max}}^2 + C_{D_{max}}^2} \tag{8.12}$$

$$C_{N_{max(+)}} = \sqrt{1,5544^2 + 0,02041^2} = 1,5545$$

$$V_{stall+} = \sqrt{\frac{2 \frac{G_w}{S}}{\rho \cdot C_{N_{max(+)}}} \tag{8.13}$$

$$V_{stall+} = \sqrt{\frac{2 \frac{880,17lb}{210,0038ft^2}}{(0,0021403slug/ft^2)(1,5545)}} = 50,04ft/s$$

$$C_{N_{max(-)}} = \sqrt{C_{L_{max(-)}}^2 + C_{D_{max(-)}}^2} \quad (8.14)$$

$$C_{N_{max(-)}} = \sqrt{-1,2919^2 + 0,03303^2} = 1,2923$$

$$V_{stall(-)} = \sqrt{\frac{2 \frac{G_W}{S}}{\rho \cdot C_{N_{max(-)}}}} \quad (8.15)$$

$$V_{stall(-)} = \sqrt{\frac{2 \frac{880,17lb}{210,0038ft^2}}{(0,0021403slug/ft^2)(1,2923)}} = 54,88ft/s$$

$$V_c = k_c \sqrt{\frac{G_w}{S}} \quad (8.16)$$

$$V_c = (33) \sqrt{\frac{880,17lb}{210,0038ft^2}} = 67,56KEAS = 119,81ft/s$$

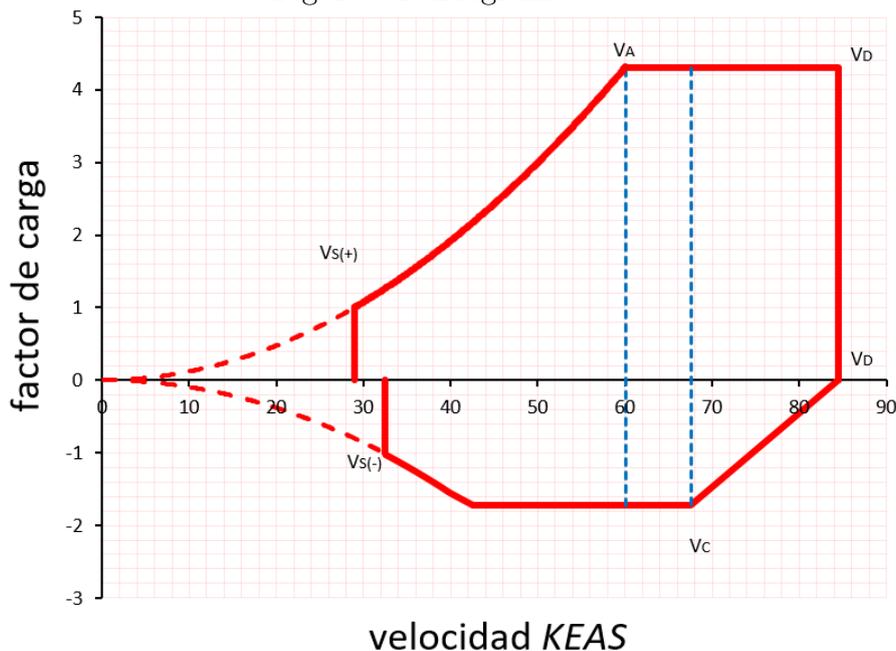
$$V_d = (1,25)V_c \quad (8.17)$$

$$V_d = (1,25)(119,81ft/s) = 149,76ft/s$$

$$V_A = V_{stall(+)} \sqrt{n_{lim(+)}} \quad (8.18)$$

$$V_A = (50,04ft/s) \sqrt{4,3} = 103,84ft/s$$

Figura 8.1: Diagrama  $v-n$ .



Cuadro 8.9: Velocidades de maniobras permitidas.

	<i>m/s</i>	<i>km/h</i>	<i>ft/s</i>	<i>knots</i>	<i>keas</i>	<i>mph</i>
$V_{s(+)}$	15.25	54.91	50.04	29.65	28.22	34.12
$V_{s(-)}$	16.73	60.22	54.88	32.52	30.95	37.42
$V_a$	31.65	113.94	103.84	61.52	58.55	70.80
$V_c$	36.52	131.46	119.81	70.98	67.56	81.69
$V_d$	45.65	164.33	149.76	88.73	84.45	102.11

### 8.1.5 Cálculos aerodinámicos

Con la velocidad de mejor relación de planeo <sup>(2)</sup>, apéndice A-A.1, se asume *Mach* de 0,0617 y  $R_e = 1997517.04$  en régimen subsónico de vuelo. De esta forma, con el software *XFLR5*<sup>®</sup> se analizó aerodinámicamente los perfiles en el ala principal NACA 43012a; estabilizador horizontal y vertical NACA 0009 obtenidos desde UIUC Airfoil Coordinates Database [38], cuadro 8.11 y apéndice B. El método de análisis esta en mantener las condiciones de número mach y Reynolds constantes variando el ángulo de ataque de -20 a 20 grados de incidencia en intervalos de 0.5 grados por cada régimen de velocidad desde  $V_s = 15,19m/s$  hasta  $V_d = 40,23m/s$  para el modelo matemático final.

Cuadro 8.10: Condiciones atmosféricas del vuelo.

<b>Altitud</b>	1080	<i>m</i>
<b>Gravedad</b>	9.81	<i>m/s</i> <sup>2</sup>
<b>Temperatura</b>	29.33	<i>c</i>

Cuadro 8.11: Datos aerodinámicos obtenidos a 21.0109 m/s.

		<i>Ala principal</i>	<i>E. horizontal</i>	<i>E. vertical</i>
<b>Perfil</b>		NACA 43012A	NACA 0009	NACA 0009
<b>Pendiente de lift</b>	$a$	5.79	5.91	5.98
<b>Drag cero lift</b>	$C_{D_0}$	0.0086	0.0079	0.0078
<b>Lift máximo</b>	$C_{L_{max}}$	1.55	1.28	1.29
<b>Momento cero lift</b>	$C_{m_0}$	0.018	0	0
<b>Lift ala</b>	$C_{L_W}$	0.5054		
<b>Lift E. horizontal</b>	$C_{L_T}$		0.1043	
<b>AOA cero lift</b>	$\alpha_0$	-1	0	0
<b>Lift elevador</b>	$a_{2_\eta}$		4.42	
<b>Lift alerón</b>	$a_{2_\xi}$		2.31	
<b>Lift rudder</b>	$a_{2_\zeta}$		3.84	

*Fuente: Autores.*

<sup>2</sup>[37] La velocidad de mejor relación de planeo, es a aquella velocidad en la que de acuerdo al diseño aerodinámico de la aeronave se puede recorrer mayor distancia, con respecto a la altura a la que se encuentra la misma, es decir, depende de la relación de planeo de cada aeronave en particular.

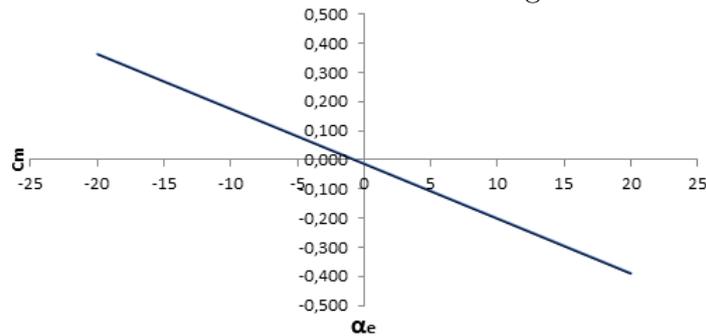
$$R_e = \frac{V_0 \bar{c} \rho}{\mu} \quad (8.19)$$

$$R_e = \frac{(21,0109 \text{ m/s})(1,524 \text{ m})(1,10968 \text{ kg/m}^3)}{0,0000177884 \text{ Pa} * \text{s}} = 1997517,04$$

### 8.1.6 Cálculo de la condición de equilibrio

Se considera en el ajuste del equilibrio que el piloto puede establecer un ángulo de elevador  $\eta$  obteniendo la fuerza de sustentación suficiente para soportar el peso total y brindar el balance suficiente con respecto al arrastre, velocidad y trayectoria de vuelo. Siendo el perfil NACA 0009 simétrico en el estabilizador horizontal, la fuerza de arrastre será cero, de tal forma que a una velocidad  $V_0$ , esta es mayor al arrastre brindando un coeficiente de momento  $C_m$ , para un ángulo  $\alpha_e$ , ecuación 8.20. Siendo así, desde un vuelo estable y nivelado, para cambiar la condición de vuelo es necesario mover los controles a la nueva configuración del elevador  $\eta_e$  garantizando un estado de equilibrio, figura 8.2.

Figura 8.2: Condición de estabilidad estática longitudinal a 21.0109 m/s.



Fuente: Autores.

### Condición de estabilidad estática longitudinal

$$\frac{dC_m}{d\alpha} < 0 \quad (8.20)$$

$$\frac{dC_m}{dC_{L_w}} < 0$$

$$\frac{dC_m}{dC_{L_w}} = (h - h_0) - \bar{V}_T \frac{a_1}{a} \left( 1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) \quad (8.21)$$

$$\frac{dC_m}{dC_{L_w}} = (0,256 - 0,25) - (0,329) \frac{5,91}{5,79} (1 - 0,423) = -0,188$$

$$K_n = -\frac{dC_m}{dC_{L_w}} \quad (8.22)$$

$$K_n = 0,188$$

$$h_n = h_0 + \bar{V}_T \frac{a_1}{a} \left( 1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) \quad (8.23)$$



$$C_{L_T} = a_0 + \alpha_T a_1 + a_2 \eta \quad (8.29)$$

$$C_{L_T} = 0,0 + (5,91)(0,0176) + (4,42)(0) = 0,1044$$

$$C_L = C_{L_W} + \frac{S_T}{S}(C_{L_T}) \quad (8.30)$$

$$C_L = 0,5054 + \frac{1,92m^2}{19,51m^2}(0,1044) = 0,5157$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{L_W}(h - h_0) - C_{L_T} \bar{V}_T \quad (8.31)$$

$$C_m = 0,0184 + (0,5054)(0,256 - 0,25) - (0,1044)(0,329) = -0,0130$$

$$C_D = C_{D_0} + KC_L^2 \quad (8.32)$$

$$C_D = 0,00862 + (0,0406)(0,5157)^2 = 0,0194$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2C_{L_W}}{\pi AR} \quad (8.33)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2(0,5054)}{\pi (8,81)} = 0,0365$$

$$\alpha_w = \alpha_e + \alpha_{w_r} \quad (8.34)$$

$$\alpha_w = 0 + 4 = 4$$

$$\eta_e = \frac{C_{L_T}}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} \left( \eta_T + \alpha_w \left( 1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right) - \alpha_{w_r} - \varepsilon_0 \right) \quad (8.35)$$

$$\eta_e = \frac{0,1044}{4,42} - \frac{5,91}{4,42} ((-1,87 * \pi/180) + (4 * \pi/180)(1 - 0,423) - (4 * \pi/180) - 0,0365)$$

$$\eta_e = 0,1557 * \pi/180 = 8,92$$

La condición de equilibrio total en la velocidad de perdida  $V_s = 15,1994m/s$  y la velocidad máxima  $V_d = 40,2336m/s$ , bajo los parámetros del cuadro 8.12, se describe en la sección 9.1 y apéndice C-C.2.

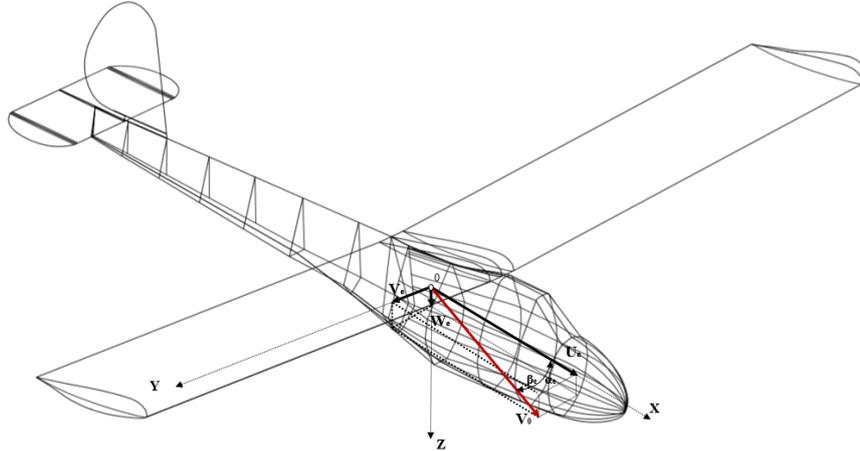
Cuadro 8.12: Condición de vuelo.

<b>Peso</b>	3916.53	<i>N</i>
<b>Masa</b>	399.24	<i>kg</i>
<b>Altitud</b>	1080	<i>m</i>
	3543	<i>ft</i>
$\gamma$	0	
$\alpha_e$	0	
$X_{c.g}$	2.203	<i>m</i>
$K_n$	0.188	
$h_n$	0.444	

## 8.2 Respuestas en controles aerodinámicos

### Cálculo de velocidades de equilibrio

Figura 8.4: Velocidad a través de ángulos de perturbación.



Fuente: Autores.

Para calcular las componentes  $U_e$ ,  $V_e$  y  $W_e$ , empleamos las rotaciones de los ángulos Euler fijados al sistema de ejes de cuerpo, apéndice D-D.2. En el desarrollo del sistema de ecuaciones se tiene en cuenta las variables de perturbación  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\phi$  y velocidad de vuelo  $V_0$ , figura 8.4.

$$V_0 = V_{L/D_{max}} = 21,0109m/s$$

$$\begin{bmatrix} U_e \\ V_e \\ W_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21,0109m/s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

$$U_e = 21,0109m/s$$

$$V_e = 0m/s$$

$$W_e = 0m/s$$

### 8.2.1 Ecuaciones de movimiento

A partir del teorema de cantidad de movimiento y teorema de momento cinético, se proyectan las ecuaciones de movimiento sobre los ejes de cuerpo. La de velocidad en un punto con respecto a los momentos es dada como:

$$\begin{aligned} u &= \dot{x} - ry + qz \\ v &= \dot{y} - pz + rx \\ w &= \dot{z} - qx + py \end{aligned} \quad (8.37)$$

Asumiendo que el planeador es un cuerpo rígido, se entiende que  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , así la velocidad que representa el problema en cuestión en cada componente será:

$$\begin{aligned} u &= qz - ry \\ v &= rx - pz \\ w &= py - qx \end{aligned} \quad (8.38)$$

De igual forma, las componentes de aceleración pueden ser dadas como:

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{u} - rv + qw \\ a_y &= \dot{v} - pw + ru \\ a_z &= \dot{w} - qu + pv \end{aligned} \quad (8.39)$$

Reemplazando la velocidad en el centro de gravedad  $(U, V, W)$  y la velocidad inercial  $(u, v, w)$ , obtenemos la velocidad en cualquier punto distinto al centro de gravedad:

$$\begin{aligned} u' &= U + u = U - ry + qz \\ v' &= V + v = V - pz + rx \\ w' &= W + w = W - qx + py \end{aligned} \quad (8.40)$$

A partir de las ecuación 8.39 consideramos las aceleraciones un punto distinto al centro de gravedad.

$$\begin{aligned} a'_x &= \dot{u}' - rv' + qw' \\ a'_y &= \dot{v}' - pw' + ru' \\ a'_z &= \dot{w}' - qu' + pv' \end{aligned} \quad (8.41)$$

Derivando con respecto al tiempo las ecuación 8.40:

$$\begin{aligned} \dot{u}' &= \dot{U} - \dot{r}y + \dot{q}z \\ \dot{v}' &= \dot{V} - \dot{p}z + \dot{r}x \\ \dot{w}' &= \dot{W} - \dot{q}x + \dot{p}y \end{aligned} \quad (8.42)$$

Para obtener las componentes de aceleraciones inerciales en un punto distinto del centro de gravedad sustituimos la ecuación 8.40 y 8.42 dentro de las ecuación 8.41.

$$\begin{aligned} a'_x &= \dot{U} - rV + qW - x(q^2 + r^2) + y(pq - \dot{r}) + z(pr + \dot{q}) \\ a'_y &= \dot{V} - pW + rU + x(pq + \dot{r}) - y(p^2 + r^2) + z(qr - \dot{p}) \end{aligned} \quad (8.43)$$

$$a'_z = \dot{W} - qU + pV + x(pr - \dot{q}) + y(qr + \dot{p}) - z(p^2 + q^2)$$

A partir de la ecuación 2.3, donde  $(X, Y, Z)$  son las componentes de fuerza total en un punto por cada eje, podemos reescribir:

$$\begin{aligned} \sum \delta m a'_x &= X \\ \sum \delta m a'_y &= Y \\ \sum \delta m a'_z &= Z \end{aligned} \quad (8.44)$$

Sustituyendo la ecuación 8.43 en la ecuación 8.44, con origen  $O$  en el centro de gravedad y masa constante, brindamos la representación general de las ecuaciones de fuerza total para un cuerpo rígido con referencia a sus movimientos:

$$\begin{aligned} m(\dot{U} - rV + qW) &= X \\ m(\dot{V} - pW + rU) &= Y \\ m(\dot{W} - qU + pV) &= Z \end{aligned} \quad (8.45)$$

A partir del teorema de momento cinético, consideramos que los momentos son producidos por las fuerzas actuantes debido a la masa en el centro de gravedad, creando incrementos en las componentes de momento. Las componentes de momentos totales, en términos de inercias, serán dados como:

$$\begin{aligned} I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr + I_{xy}(pr - \dot{q}) - I_{xz}(pq + \dot{r}) + I_{yz}(r^2 - q^2) &= L \\ I_y \dot{q} + (I_x - I_z)pr + I_{yz}(pq - \dot{r}) + I_{xz}(p^2 - r^2) - I_{xy}(qr + \dot{p}) &= M \\ I_z \dot{r} - (I_x - I_y)pq - I_{yz}(pr - \dot{q}) + I_{xz}(qr - \dot{p}) + I_{xy}(q^2 - p^2) &= N \end{aligned} \quad (8.46)$$

La ecuación 8.46 representa la forma general del momento total para un cuerpo rígido describiendo el movimiento de balanceo, cabeceo y guiñada. Asumiendo plano  $OXZ$  simétrico, con la masa uniformemente distribuida,  $I_{xy}$  y  $I_{yz}$  serán insignificativamente nulos; cuando el sistema de ejes de cuerpo esté alineado al sistema de ejes inerciales,  $I_{xz}$  será cercano a cero o negativo

$$\begin{aligned} I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr - I_{xz}(pq + \dot{r}) &= L \\ I_y \dot{q} + (I_x - I_z)pr + I_{xz}(p^2 - r^2) &= M \\ I_z \dot{r} - (I_x - I_y)pq + I_{xz}(qr - \dot{p}) &= N \end{aligned} \quad (8.47)$$

## Momentos y fuerzas perturbadoras

Considerando momentos y fuerzas perturbadoras por efectos aerodinámicos ( $a$ ), efectos gravitacionales ( $g$ ), efectos de controles aerodinámicos ( $c$ ), efecto de motores ( $p$ ) y efectos de perturbaciones aerodinámicas ( $d$ ) podemos describir la ecuación 8.45 y 8.47 sin tener en cuenta la magnitud del movimiento.

$$\begin{aligned}
 m(\dot{U} - rV + qW) &= X_a + X_g + X_c + X_p + X_d \\
 m(\dot{V} - pW + rU) &= Y_a + Y_g + Y_c + Y_p + Y_d \\
 m(\dot{W} - qU + pV) &= Z_a + Z_g + Z_c + Z_p + Z_d \\
 I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr - I_{xz}(pq + \dot{r}) &= L_a + L_g + L_c + L_p + L_d \\
 I_y \dot{q} + (I_x - I_z)pr + I_{xz}(p^2 - r^2) &= M_a + M_g + M_c + M_p + M_d \\
 I_z \dot{r} - (I_x - I_y)pq + I_{xz}(qr - \dot{p}) &= N_a + N_g + N_c + N_p + N_d
 \end{aligned} \tag{8.48}$$

## Linealización de las ecuaciones de movimiento

Asumiendo condición inicial de vuelo recto y nivelado con  $\phi = \theta = \psi = 0$ , velocidad  $V_0$  con componentes de  $(U_e, V_e, W_e)$  y velocidad angular igual a cero, bajo pequeñas perturbaciones, las componentes de la velocidad lineal serán  $(u, v, w)$  y las componentes de la velocidad angular serán  $(p, q, r)$ , de manera que los términos que involucran productos y cuadrados son insignificantes y pueden ser ignorados, a igual que las perturbaciones por la atmósfera.

$$X_d = Y_d = Z_d = L_d = M_d = N_d = 0 \tag{8.49}$$

## Términos gravitacionales

Los términos gravitacionales resuelven las componentes de peso dentro de las fuerzas actuantes de acuerdo a la contribución del movimiento perturbador. Así, la contribución gravitacional se desarrolla desde el peso hacia los ejes de cuerpo, asumiendo origen  $O$  sobre el centro de gravedad, no habrán momentos producidos por el peso en cualquier eje.

$$\begin{aligned}
 L_g = M_g = N_g &= 0 \\
 \begin{bmatrix} X_{g_e} \\ Y_{g_e} \\ Z_{g_e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -mg \sin\theta_e \\ 0 \\ mg \cos\theta_e \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{8.50}$$

Durante una perturbación habrán variaciones de actitud en  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$  en relación con las componentes de peso y por condición, las perturbaciones angulares son pequeñas. Estas pequeñas aproximaciones pueden ser usadas para dar la siguiente relación.

$$\begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -mg \sin \theta_e \\ 0 \\ mg \cos \theta_e \end{bmatrix} \quad (8.51)$$

$$\begin{aligned} X_g &= -mg \sin \theta_e - mg\theta \cos \theta_e \\ Y_g &= mg\psi \sin \theta_e + mg\phi \cos \theta_e \\ Z_g &= mg \cos \theta_e - mg\theta \sin \theta_e \end{aligned} \quad (8.52)$$

### Términos en efectos aerodinámicos

En una perturbación las fuerzas y momentos aerodinámicos dependerán de los términos de sus derivadas expresadas en función de las sumas de las series de Taylor, donde cada serie involucra una variable de movimiento, sea  $(u, v, w)$  ó  $(p, q, r)$ . Así, desde que el movimiento de las variables sea pequeño, las ecuaciones pueden ser simplificadas, para el caso de fuerza axial  $X_a$  y el momento de balanceo  $L_a$  obtendríamos:

$$\begin{aligned} X_a &= X_{ae} + \dot{X}_u u + \dot{X}_v v + \dot{X}_w w + \dot{X}_p p + \dot{X}_q q + \dot{X}_r r + \dot{X}_{\dot{w}} \dot{w} \\ L_a &= L_{ae} + \dot{L}_u u + \dot{L}_v v + \dot{L}_w w + \dot{L}_p p + \dot{L}_q q + \dot{L}_r r + \dot{L}_{\dot{w}} \dot{w} \end{aligned} \quad (8.53)$$

### Términos de controles aerodinámicos

Asumiendo solo movimientos de las superficies primarias elevador, rudder y alerones, sus deflexiones producirán fuerzas y momentos. Es importante cuantificar cada valor a partir de derivadas aerodinámicas describiendo los fenómenos aerodinámicos a partir de sus respectivas curvas de sustentación  $(a_2, a_{2R}, a_{2A})$ .

$$\begin{aligned} X_c &= \dot{X}_\xi \xi + \dot{X}_\eta \eta + \dot{X}_\zeta \zeta \\ Y_c &= \dot{Y}_\xi \xi + \dot{Y}_\eta \eta + \dot{Y}_\zeta \zeta \\ Z_c &= \dot{Z}_\xi \xi + \dot{Z}_\eta \eta + \dot{Z}_\zeta \zeta \\ L_c &= \dot{L}_\xi \xi + \dot{L}_\eta \eta + \dot{L}_\zeta \zeta \\ M_c &= \dot{M}_\xi \xi + \dot{M}_\eta \eta + \dot{M}_\zeta \zeta \\ N_c &= \dot{N}_\xi \xi + \dot{N}_\eta \eta + \dot{N}_\zeta \zeta \end{aligned} \quad (8.54)$$

### Términos de potencia

La contribución es nula a razón de falta de motor.

### Ajuste de las ecuaciones de movimiento eje longitudinal

Las ecuaciones de movimiento en el eje longitudinal  $OXZ$  describirán la fuerza axial, fuerza normal y el momento de cabeceo. Asumiendo que no hay movimiento lateral, las

variables y derivadas de  $v$ ,  $p$ ,  $r$ ,  $\xi$  y  $\zeta$  serán cero. Por lo tanto, en condiciones iniciales de vuelo recto y nivelado, se entiende que  $\theta_e = W_e = 0$  con efectos de motores nulos  $\dot{X}_\tau \tau = \dot{Z}_\tau \tau = \dot{M}_\tau \tau = 0$ . Así, la forma más simple de las ecuaciones de movimiento longitudinales serán:

$$\begin{aligned} m\dot{u} - \dot{X}_u u - \dot{X}_w \dot{w} - \dot{X}_q q + mg\theta &= \dot{X}_\eta \eta \\ -\dot{Z}_u u + (m - \dot{Z}_w)\dot{w} - \dot{Z}_q q - (\dot{Z}_q + mU_e)q &= \dot{Z}_\eta \eta \\ -\dot{M}_u u - \dot{M}_w \dot{w} - \dot{M}_q q + I_y \dot{q} - \dot{M}_q q &= \dot{M}_\eta \eta \end{aligned} \quad (8.55)$$

### Ajuste de las ecuaciones de movimiento eje lateral-direccional

Las ecuaciones de movimiento en el eje lateral-direccional describirán la fuerza lateral, momento de balanceo y momento de guiñada. Asumiendo que no hay movimiento longitudinal, las variables y derivadas de  $u$ ,  $w$ ,  $q$  y  $\eta$  son cero. Por lo tanto, en condiciones iniciales de vuelo recto y nivelado con referencia a los ejes de viento, se entiende que  $\theta_e = W_e = 0$ . Así, la forma más simple de las ecuaciones de movimiento lateral-direccional para el caso de estudio serán:

$$\begin{aligned} m\dot{v} - \dot{Y}_v v - \dot{Y}_p p - (\dot{Y}_r - mU_e)r - mg\phi &= \dot{Y}_\xi \xi + \dot{Y}_\zeta \zeta \\ -\dot{L}_v v + I_x \dot{p} - \dot{L}_p p - I_{xz} \dot{r} - \dot{L}_r r &= \dot{L}_\xi \xi + \dot{L}_\zeta \zeta \\ -\dot{N}_v v - I_{xz} \dot{p} - \dot{N}_p p + I_z \dot{r} - \dot{N}_r r &= \dot{N}_\xi \xi + \dot{N}_\zeta \zeta \end{aligned} \quad (8.56)$$

## 8.2.2 Derivadas de estabilidad y control aerodinámico

### Eje longitudinal

$\dot{X}_u = \frac{\partial X}{\partial U}$  Fuerza axial debido a la velocidad axial

$$\begin{aligned} X_u &= -2C_D - M_0 \frac{\partial C_D}{\partial M} \\ X_u &= -2(0,0194) - (0,0617)(-0,0173) = -0,0378 \end{aligned} \quad (8.57)$$

Refiriéndonos al cuadro D.9-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{X}_u &= \frac{1}{2} \rho V_0 S X_u \\ \dot{X}_u &= \frac{1}{2} (1,10968 \text{ kg/m}^3) (21,0109 \text{ m/s}) (19,51 \text{ m}^2) (-0,0378) - 8,59 \text{ kg/s} \end{aligned} \quad (8.58)$$

$\dot{Z}_u = \frac{\partial Z}{\partial U}$  Fuerza normal debido a la velocidad axial

$$\begin{aligned} Z_u &= -2C_L - M_0 \frac{\partial C_L}{\partial M} \\ Z_u &= -2(0,5157) - (0,0617)(0,0519) = -1,0347 \end{aligned} \quad (8.59)$$

Refiriéndonos al cuadro D.9-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{Z}_u &= \frac{1}{2}\rho V_0 S Z_u & (8.60) \\ \dot{Z}_u &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(-1,0347) = -235,331kg/s \end{aligned}$$

$\dot{X}_w = \frac{\partial X}{\partial W}$  **Fuerza axial debido a la velocidad normal**

$$\begin{aligned} X_w &= C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha} & (8.61) \\ X_w &= 0,5157 - 0,0271 = 0,4886 \end{aligned}$$

Refiriéndonos al cuadro D.9-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{X}_w &= \frac{1}{2}\rho V_0 S X_w & (8.62) \\ \dot{X}_w &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(0,4886) = 111,1356kg/s \end{aligned}$$

$\dot{Z}_w = \frac{\partial Z}{\partial W}$  **Fuerza normal debido a la velocidad normal**

$$\begin{aligned} Z_w &= -\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + C_D\right) & (8.63) \\ Z_w &= -(5,792 + 0,0194) = -5,8117 \end{aligned}$$

Refiriéndonos al cuadro D.9-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{Z}_w &= \frac{1}{2}\rho V_0 S Z_w & (8.64) \\ \dot{Z}_w &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(-5,8117) = -1321,815kg/s \end{aligned}$$

$\dot{M}_u = \frac{\partial M}{\partial U}$  **Momento de cabeceo debido a la velocidad axial**

$$\begin{aligned} M_u &= M_0 \frac{\partial C_m}{\partial M} & (8.65) \\ M_u &= (0,0617)(0,01578) = 0,0009743 \end{aligned}$$

Refiriéndonos al cuadro D.9-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{M}_u &= \frac{1}{2}\rho V_0 S \bar{c} M_u & (8.66) \\ \dot{M}_u &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(1,524m)(0,0009743) = 0,3377kgm/s \end{aligned}$$

$\dot{M}_w = \frac{\partial M}{\partial W}$  **Momento de cabeceo debido a la velocidad normal**

$$\begin{aligned} M_w &= -aK_n & (8.67) \\ M_w &= -(5,79)(0,188) = -1,0891 \end{aligned}$$

Refiriéndonos al cuadro D.9-apéndice D.

$$\dot{M}_w = \frac{1}{2}\rho V_0 S \bar{c} M_w \quad (8.68)$$

$$\dot{M}_w = \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(1,524m)(-1,0891) = -377,5182m/s$$

$\dot{X}_q = \frac{\partial X}{\partial q}$  **Fuerza axial debido a la tasa de cabeceo**

$$X_q = -\bar{V}_T \frac{\partial C_{DT}}{\partial \alpha_T} \quad (8.69)$$

$$X_q = -(0,329)(0,1438) = -0,0474$$

Refiriéndonos al cuadro D.9-apéndice D.

$$\dot{X}_q = \frac{1}{2}\rho V_0 S \bar{c} X_q \quad (8.70)$$

$$\dot{X}_q = \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(1,524m)(-0,0474) = -16,4337kgm/s$$

$\dot{Z}_q = \frac{\partial Z}{\partial q}$  **Fuerza normal debido a la tasa de cabeceo**

$$Z_q = -\bar{V}_T a_1 \quad (8.71)$$

$$Z_q = -(0,329)(5,91) = -1,9504$$

Refiriéndonos al cuadro D.9-apéndice D.

$$\dot{Z}_q = \frac{1}{2}\rho V_0 S \bar{c} Z_q \quad (8.72)$$

$$\dot{Z}_q = \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(1,524m)(-1,9504)$$

$$\dot{Z}_q = -676,0447kgm/s$$

$\dot{M}_q = \frac{\partial M}{\partial q}$  **Momento de cabeceo debido a la tasa de cabeceo**

$$M_q = Z_q \frac{l_T}{\bar{c}} \quad (8.73)$$

$$M_q = (-1,9504) \left( \frac{5,105m}{1,524m} \right) = -6,5333$$

Refiriéndonos al cuadro D.9-apéndice D.

$$\dot{M}_q = \frac{1}{2}\rho V_0 S \bar{c}^2 M_q \quad (8.74)$$

$$\dot{M}_q = \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(1,524m)^2(-6,5333)$$

$$\dot{M}_q = -3451,2099kgm^2/s$$

$\dot{X}_{\dot{w}} = \frac{\partial X}{\partial \dot{w}}$  **Fuerza axial debido a la tasa de cambio de velocidad normal**

$$X_{\dot{w}} = X_q \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \quad (8.75)$$

$$X_{\dot{w}} = (-0,0474)(0,423) = -0,0201$$

Refiriéndonos al cuadro D.9-apéndice D.

$$\dot{X}_{\dot{w}} = \frac{1}{2} \rho S \bar{c} X_{\dot{w}} \quad (8.76)$$

$$\dot{X}_{\dot{w}} = \frac{1}{2} (1,10968 \text{ kg/m}^3) (19,51 \text{ m}^2) (1,524 \text{ m}) (-0,0201) = -0,3315 \text{ kg}$$

$\dot{Z}_{\dot{w}} = \frac{\partial Z}{\partial \dot{w}}$  **Fuerza normal debido a la tasa de cambio de la velocidad normal**

$$Z_{\dot{w}} = Z_q \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \quad (8.77)$$

$$Z_{\dot{w}} = (-1,9504)(0,423) = -0,8267$$

Refiriéndonos al cuadro D.9-apéndice D.

$$\dot{Z}_{\dot{w}} = \frac{1}{2} \rho S \bar{c} Z_{\dot{w}} \quad (8.78)$$

$$\dot{Z}_{\dot{w}} = \frac{1}{2} (1,10968 \text{ kg/m}^3) (19,51 \text{ m}^2) (1,524 \text{ m}) (-0,8267) = -13,6375 \text{ kg}$$

$\dot{M}_{\dot{w}} = \frac{\partial M}{\partial \dot{w}}$  **Momento de cabeceo debido a la tasa de cambio de la velocidad normal**

$$M_{\dot{w}} = M_q \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \quad (8.79)$$

$$M_{\dot{w}} = (-6,5333)(0,423) = -2,7691$$

Refiriéndonos al cuadro D.9-apéndice D.

$$\dot{M}_{\dot{w}} = \frac{1}{2} \rho S \bar{c}^2 M_{\dot{w}} \quad (8.80)$$

$$\dot{M}_{\dot{w}} = \frac{1}{2} (1,10968 \text{ kg/m}^3) (19,51 \text{ m}^2) (1,524 \text{ m})^2 (-2,7691) = -69,6193 \text{ kgm}$$

### Eje lateral-direccional

$\dot{Y}_v = \frac{\partial Y}{\partial v}$  **Fuerza lateral debido al deslizamiento lateral**

$$Y_v = \left( \frac{S_B}{S} y_B - \frac{S_F}{S} a_{1F} \right) \quad (8.81)$$

$$Y_v = \left( \frac{6,088 \text{ m}^2}{19,51 \text{ m}^2} (0,0) - \frac{1,21 \text{ m}^2}{19,51 \text{ m}^2} (5,98) \right) = -0,3713$$

Refiriéndonos al cuadro D.10-apéndice D.

$$\dot{Y}_v = \frac{1}{2}\rho V_0 S Y_v \quad (8.82)$$

$$\dot{Y}_v = \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(-0,3713) = -84,4525kg/s$$

$\dot{L}_v = \frac{\partial L}{\partial V}$  **Momento de balanceo debido al deslizamiento lateral**

$$\begin{aligned} L_{v(diedro)} &= -\frac{1}{S_s} \int_0^s c_y a_y \Gamma y dy \\ L_{v(diedro)} &= -\frac{a\Gamma c(b/2)}{2S} \\ L_{v(diedro)} &= -\frac{(5,79)(3*\pi/180)(1,524m)(13,106m/2)}{2(19,51m^2)} = -0,0776 \\ L_{v(fin)} &= -\bar{V}_F \frac{h_F}{l_F} a_{1F} \\ L_{v(fin)} &= -(0,0218) \left( \frac{1,4793m}{4,5979m} \right) (5,98) = -0,0419 \end{aligned} \quad (8.83)$$

Refiriéndonos al cuadro D.10-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{L}_{v(wing)} &= \frac{1}{2}\rho V_0 S b L_{v(wing)} \\ \dot{L}_{v(wing)} &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(13,106m)(-0,0776) \\ \dot{L}_{v(wing)} &= -231,3787kgm/s \\ \dot{L}_{v(fin)} &= \frac{1}{2}\rho V_0 S b L_{v(fin)} \\ \dot{L}_{v(fin)} &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(13,106m)(-0,0419) \\ \dot{L}_{v(fin)} &= -125,032kgm/s \\ \dot{L}_v &= \dot{L}_{v(wing)} + \dot{L}_{v(fin)} \\ \dot{L}_v &= -231,3787kgm/s - 125,032kgm/s = -356,3108kgm/s \end{aligned} \quad (8.84)$$

$\dot{N}_v = \frac{\partial N}{\partial V}$  **Momento de guiñada debido al deslizamiento lateral**

$$\begin{aligned} N_{v(fin)} &= \bar{V}_F a_{1F} \\ N_{v(fin)} &= (0,0218)(5,98) = 0,1303 \end{aligned} \quad (8.85)$$

Refiriéndonos al cuadro D.10-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{N}_{v(fin)} &= \frac{1}{2}\rho V_0 S b N_{v(fin)} \\ \dot{N}_{v(fin)} &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(13,106m)(0,1303) \\ \dot{N}_{v(fin)} &= 388,3024kgm/s \end{aligned} \quad (8.86)$$

$\dot{Y}_p = \frac{\partial Y}{\partial p}$  **Fuerza lateral debido a la tasa de balanceo**

$$Y_{p(fin)} = -\frac{1}{Sb} \int_0^{H_F} a_h c_h h dh \quad (8.87)$$

$$Y_{p(fin)} = -\frac{a_{1F} \bar{c}_F H_F^2}{2Sb}$$

$$Y_{p(fin)} = -\frac{(5,98)(0,93)(2,2172m)^2}{(2)(19,51m^2)(13,106m)} = -0,0535$$

Refiriéndonos al cuadro D.10-apéndice D.

$$\dot{Y}_{p(fin)} = \frac{1}{2} \rho V_0 S b Y_{p(fin)} \quad (8.88)$$

$$\dot{Y}_{p(fin)} = \frac{1}{2} (1,10968 kg/m^3) (21,0109 m/s) (19,51 m^2) (13,106 m) (-0,0535)$$

$$\dot{Y}_{p(fin)} = -159,5547 kg/s$$

$\dot{L}_p = \frac{\partial L}{\partial p}$  **Momento de balanceo debido a la tasa de balanceo**

$$L_p = -\frac{1}{2Ss^2} \int_0^s (a_y + C_{Dy}) c_y y^2 dy \quad (8.89)$$

$$L_p = -\frac{(a+C_D)\bar{c}(b/2)}{6S}$$

$$L_p = -\frac{(5,79+0,0194)(1,524m)(13,106m/2)}{6(19,51m^2)} = -0,4958$$

Refiriéndonos al cuadro D.10-apéndice D.

$$\dot{L}_p = \frac{1}{2} \rho V_0 S b^2 L_p \quad (8.90)$$

$$\dot{L}_p = \frac{1}{2} (1,10968 kg/m^3) (21,0109 m/s) (19,51 m^2) (13,106 m)^2 (-0,4958)$$

$$\dot{L}_p = -19369,9107 kgm^2/s$$

$\dot{N}_p = \frac{\partial N}{\partial p}$  **Momento de guiñada debido a la tasa de balanceo**

$$N_p = -\frac{1}{2Ss^2} \int_0^s \left( C_{Ly} - \frac{dC_D}{d\alpha_y} \right) c_y y^2 dy \quad (8.91)$$

$$N_p = -\frac{(C_L - \frac{dC_D}{d\alpha}) \bar{c}(\frac{b}{2})}{6S}$$

$$N_p = -\frac{(0,5157-0,0271)(1,524m)(13,106m/2)}{6(19,51m^2)} = -0,0417$$

Refiriéndonos al cuadro D.10-apéndice D.

$$\dot{N}_p = \frac{1}{2} \rho V_0 S b^2 N_p \quad (8.92)$$

$$\dot{N}_p = \frac{1}{2} (1,10968 kg/m^3) (21,0109 m/s) (19,51 m^2) (13,106 m)^2 (-0,0417)$$

$$\dot{N}_p = -1628,5832 kgm^2/s$$

$\dot{Y}_r = \frac{\partial Y}{\partial r}$  **Fuerza lateral debido a la tasa de guiñada**

$$Y_r = \bar{V}_F a_{1F} \quad (8.93)$$

$$Y_r = (0,0218)(5,98) = 0,1303$$

Refiriéndonos al cuadro D.10-apéndice D.

$$\dot{Y}_r = \frac{1}{2} \rho V_0 S b Y_r \quad (8.94)$$

$$\dot{Y}_r = \frac{1}{2} (1,10968 \text{ kg/m}^3) (21,0109 \text{ m/s}) (19,51 \text{ m}^2) (13,106 \text{ m}) (0,1303) = 388,3024 \text{ kgm/s}$$

$\dot{L}_r = \frac{\partial L}{\partial r}$  **Momento de balanceo debido a la tasa de guiñada**

$$L_{r(wing)} = \frac{1}{S^2} \int_0^s C_{L_y} c_y y^2 dy$$

$$L_{r(wing)} = \frac{C_L \bar{c}(b/2)}{3S}$$

$$L_{r(wing)} = \frac{(0,5157)(1,524 \text{ m})(13,106 \text{ m}/2)}{3(19,51 \text{ m}^2)} = 0,0880 \quad (8.95)$$

$$L_{r(fin)} = -L_{v(fin)} \frac{l_F}{b}$$

$$L_{r(fin)} = -(-0,0419) \frac{(4,5979)}{(13,106 \text{ m})} = 0,0147$$

Refiriéndonos al cuadro D.10-apéndice D.

$$\dot{L}_{r(wing)} = \frac{1}{2} \rho V_0 S b^2 L_{r(wing)}$$

$$\dot{L}_{r(wing)} = \frac{1}{2} (1,10968 \text{ kg/m}^3) (21,0109 \text{ m/s}) (19,51 \text{ m}^2) (13,106 \text{ m})^2 (0,0880)$$

$$\dot{L}_{r(wing)} = 3437,8956 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

$$\dot{L}_{r(fin)} = \frac{1}{2} \rho V_0 S b^2 L_{r(fin)} \quad (8.96)$$

$$\dot{L}_{r(fin)} = \frac{1}{2} (1,10968 \text{ kg/m}^3) (21,0109 \text{ m/s}) (19,51 \text{ m}^2) (13,106 \text{ m})^2 (0,0147)$$

$$\dot{L}_{r(fin)} = 574,4226 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

$$\dot{L}_r = \dot{L}_{r(wing)} + \dot{L}_{r(fin)}$$

$$\dot{L}_r = 3437,8956 \text{ kgm}^2/\text{s} + 574,4226 \text{ kgm}^2/\text{s} = 4012,2818 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

$\dot{N}_r = \frac{\partial N}{\partial r}$  **Momento de guiñada debido a la tasa de guiñada**

$$N_{r(wing)} = -\frac{1}{S^2} \int_0^s C_{D_y} c_y y^2 dy$$

$$N_{r(wing)} = -\frac{C_D \bar{c}(b/2)}{3S}$$

$$N_{r(wing)} = -\frac{(0,0194)(1,524 \text{ m})(13,106 \text{ m}/2)}{3(19,51 \text{ m}^2)} = -0,0033 \quad (8.97)$$

$$N_{r(fin)} = -N_{v(fin)} \frac{l_F}{b}$$

$$N_{r(fin)} = -(0,1303) \frac{(4,5979)}{(13,106 \text{ m})} = -0,0457$$

Refiriéndonos al cuadro D.10-apéndice D.

$$\begin{aligned}
 \dot{N}_{r(wing)} &= \frac{1}{2}\rho V_0 S b^2 N_{r(wing)} \\
 \dot{N}_{r(wing)} &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(13,106m)^2(-0,0033) \\
 \dot{N}_{r(wing)} &= -129,4771kgm^2/s \\
 \dot{N}_{r(fin)} &= \frac{1}{2}\rho V_0 S b^2 N_{r(fin)} \\
 \dot{N}_{r(fin)} &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)(19,51m^2)(13,106m)^2(-0,0457) \quad (8.98) \\
 \dot{N}_{r(fin)} &= -1785,3617kgm^2/s \\
 \dot{N}_r &= \dot{N}_{r(wing)} + \dot{N}_{r(fin)} \\
 \dot{L}_r &= -129,4771kgm^2/s - 1785,3617kgm^2/s = -1914,8439kgm^2/s
 \end{aligned}$$

$\dot{X}_\eta = \frac{\partial X}{\partial \eta}$  **Fuerza axial debido al elevador**

$$\begin{aligned}
 e_T &= \frac{1}{\pi A R_T k_{D_T} C_{D_{0_T}} + \frac{1}{0,99 S_d}} \\
 e_T &= \frac{1}{(\pi)(2,9)(0,38)(0,0079) + \frac{1}{(0,99)(0,9773)}} = 0,9426 \\
 k_T &= \frac{1}{\pi A R_T e_T} \quad (8.99) \\
 k_T &= \frac{1}{(\pi)(2,9)(0,9426)} = 0,11644 \\
 C_{D_T} &= C_{D_{0_T}} + k_T C_{L_T}^2 \\
 C_{D_T} &= 0,0079 + (0,11644)(0,1044)^2 = 0,009169 \\
 X_\eta &= -(2) \frac{S_T}{S} k_T C_{L_T} a_{2_\eta} \quad (8.100) \\
 X_\eta &= -2 \left( \frac{1,92m^2}{19,51m^2} \right) (0,1164)(0,1044)(4,42) = -0,0106
 \end{aligned}$$

Refiriéndonos al cuadro D.11-apéndice D.

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_\eta &= \frac{1}{2}\rho V_0^2 S X_\eta \quad (8.101) \\
 \dot{X}_\eta &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)^2(19,51m^2)(-0,0106) = -50,5437N
 \end{aligned}$$

$\dot{Z}_\eta = \frac{\partial Z}{\partial \eta}$  **Fuerza normal debido al elevador**

$$\begin{aligned}
 Z_\eta &= -\frac{S_T}{S} a_{2_\eta} \quad (8.102) \\
 Z_\eta &= -\left( \frac{1,92m^2}{19,51m^2} \right) (4,42) = -0,4351
 \end{aligned}$$

Refiriéndonos al cuadro D.11-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{Z}_\eta &= \frac{1}{2}\rho V_0^2 S Z_\eta & (8.103) \\ \dot{Z}_\eta &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^2)(21,0109m/s)^2(19,51m^2)(-0,4351) = -2079,2579N \end{aligned}$$

$\dot{M}_\eta = \frac{\partial M}{\partial \eta}$  **Momento de cabeceo debido al elevador**

$$\begin{aligned} M_\eta &= -\bar{V}_T a_{2\eta} & (8.104) \\ M_\eta &= -(0,329)(4,42) = -1,4575 \end{aligned}$$

Refiriéndonos al cuadro D.11-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{M}_\eta &= \frac{1}{2}\rho V_0^2 S \bar{c} M_\eta & (8.105) \\ \dot{M}_\eta &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^2)(21,0109m/s)^2(19,51m^2)(1,524m)(-1,4575) \\ \dot{M}_\eta &= -10614,6179Nm \end{aligned}$$

$\dot{Y}_\xi = \frac{\partial Y}{\partial \xi}$  **Fuerza lateral debido al alerón**

$$\dot{Y}_\xi = 0N$$

$\dot{L}_\xi = \frac{\partial L}{\partial \xi}$  **Momento de balanceo debido al alerón**

$$\begin{aligned} L_\xi &= -\frac{1}{S_s} a_{2\xi} \int_{y_1}^{y_2} c_y y dy & (8.106) \\ L_\xi &= -\left(\frac{a_{2\xi} \bar{c}}{(S)(b/2)}\right) \left(\frac{y_2^2 - y_1^2}{2}\right) \\ L_\xi &= -\left(\frac{(2,31)(1,524m)}{(19,51m^2)(13,106m/2)}\right) \left(\frac{(6,352m)^2 - (3,302m)^2}{2}\right) = -0,4056 \end{aligned}$$

Refiriéndonos al cuadro D.11-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{L}_\xi &= \frac{1}{2}\rho V_0^2 S b L_\xi & (8.107) \\ \dot{L}_\xi &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)^2(19,51m^2)(13,106m)(-0,4056) \\ \dot{L}_\xi &= -25402,69153Nm \end{aligned}$$

$\dot{N}_\xi = \frac{\partial N}{\partial \xi}$  **Momento de guiñada debido al alerón**

$$\begin{aligned} N_\xi &= \frac{1}{S_s} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial C_{Dy}}{\partial \xi}\right) c_y y dy & (8.108) \\ N_\xi &= \left(\frac{\frac{\partial C_{Dy}}{\partial \xi} \bar{c}}{(S)(b/2)}\right) \left(\frac{y_2^2 - y_1^2}{2}\right) \\ N_\xi &= \left(\frac{(-0,0350)(1,524m)}{(19,51m^2)(13,106m/2)}\right) \left(\frac{(6,352m)^2 - (3,302m)^2}{2}\right) = -0,0061 \end{aligned}$$

Refiriéndonos al cuadro D.11-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{N}_\xi &= \frac{1}{2}\rho V_0^2 S b N_\xi & (8.109) \\ \dot{N}_\xi &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)^2(19,51m^2)(13,106m)(-0,0061) \\ \dot{N}_\xi &= -384,5487Nm \end{aligned}$$

$\dot{Y}_\zeta = \frac{\partial Y}{\partial \zeta}$  **Fuerza lateral debido al rudder**

$$\begin{aligned} Y_\zeta &= \frac{S_F}{S} a_{2\zeta} & (8.110) \\ Y_\zeta &= \left( \frac{1,21m^2}{19,51m^2} \right) (3,84) = 0,2386 \end{aligned}$$

Refiriéndonos al cuadro D.11-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{Y}_\zeta &= \frac{1}{2}\rho V_0^2 S Y_\zeta & (8.111) \\ \dot{Y}_\zeta &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m)^2(19,51m^2)(0,2386) = 1140,1994N \end{aligned}$$

$\dot{L}_\zeta = \frac{\partial L}{\partial \zeta}$  **Momento de balanceo debido al rudder**

$$\begin{aligned} L_\zeta &= \bar{V}_F \frac{h_F}{l_F} a_{2\zeta} & (8.112) \\ L_\zeta &= (0,0218) \left( \frac{1,4793m}{4,5979m} \right) (3,84) = 0,0269 \end{aligned}$$

Refiriéndonos al cuadro D.11-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{L}_\zeta &= \frac{1}{2}\rho V_0^2 S b L_\zeta & (8.113) \\ \dot{L}_\zeta &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)^2(19,51m^2)(13,106m)(0,0269) = 1686,7173Nm \end{aligned}$$

$\dot{N}_\zeta = \frac{\partial N}{\partial \zeta}$  **Momento de guiñada debido al rudder**

$$\begin{aligned} N_\zeta &= -\bar{V}_F a_{2\zeta} & (8.114) \\ N_\zeta &= -(0,0218)(3,84) = -0,0837 \end{aligned}$$

Refiriéndonos al cuadro D.11-apéndice D.

$$\begin{aligned} \dot{N}_\zeta &= \frac{1}{2}\rho V_0^2 S b N_\zeta & (8.115) \\ \dot{N}_\zeta &= \frac{1}{2}(1,10968kg/m^3)(21,0109m/s)^2(19,51m^2)(13,106m)(-0,0837) \\ \dot{N}_\zeta &= -5242,4977Nm \end{aligned}$$

Habiendo calculado las derivadas de estabilidad y control aerodinámico, es conveniente brindar la igualdad en notación Británica y notación Norteamericana.

Cuadro 8.13: Derivadas longitudinales de estabilidad y control adimensionales

$$\begin{array}{lll}
 C_{x_u} \equiv X_u = -0,0378 & C_{z_u} \equiv Z_u = -1,0347 & C_{m_u} \equiv M_u = 0,00097 \\
 C_{x_\alpha} \equiv X_w = 0,488 & C_{z_\alpha} \equiv Z_w = -5,8117 & C_{m_\alpha} \equiv M_w = -1,089 \\
 C_{x_q} \equiv 2X_q = -0,0474 & C_{z_q} \equiv 2Z_q = -1,9504 & C_{m_q} \equiv 2M_q = -6,53 \\
 C_{x_{\dot{\alpha}}} \equiv 2X_{\dot{w}} = -0,0201 & C_{z_{\dot{\alpha}}} \equiv 2Z_{\dot{w}} = -0,8267 & C_{m_{\dot{\alpha}}} \equiv 2M_{\dot{w}} = -2,7691 \\
 C_{x_{\delta_e}} \equiv X_\eta = -0,0106 & C_{z_{\delta_e}} \equiv Z_\eta = -0,4351 & C_{m_{\delta_e}} \equiv M_\eta = -1,4575
 \end{array}$$

Cuadro 8.14: Derivadas lateral-direccionales de estabilidad y control adimensionales

$$\begin{array}{lll}
 C_{y_v} \equiv Y_v = -0,3713 & C_{l_v} \equiv L_v = -0,1195 & C_{n_v} \equiv N_v = 0,1303 \\
 C_{y_p} \equiv 2Y_p = -0,0535 & C_{l_p} \equiv 2L_p = -0,4958 & C_{n_p} \equiv 2N_p = -0,0417 \\
 C_{y_r} \equiv 2Y_r = 0,1303 & C_{l_r} \equiv 2L_r = 0,1027 & C_{n_r} \equiv 2N_r = -0,0490 \\
 C_{y_{\delta_A}} \equiv Y_\xi = 0 & C_{l_{\delta_A}} \equiv L_\xi = -0,4056 & C_{n_{\delta_A}} \equiv N_\xi = -0,0061 \\
 C_{y_{\delta_R}} \equiv Y_\zeta = 0,2386 & C_{l_{\delta_R}} \equiv L_\zeta = 0,0269 & C_{n_{\delta_R}} \equiv N_\zeta = -0,0837
 \end{array}$$

Estimadas las derivadas de estabilidad y control aerodinámicas en su forma adimensional, es usual ir al estudio de dinámica de vuelo. Para llevar a cabo este proceso es necesario convertir las derivadas de estabilidad y control a la forma dimensional simplificada conocida como *concise equations*, cuadros D.12, D.13 y D.14.

## Eje longitudinal

### Fuerza axial debido al elevador

$$x_u = \frac{\dot{X}_u}{m} + \frac{\dot{X}_w \dot{Z}_u}{m(m - \dot{Z}_w)} \quad (8.116)$$

$$x_u = \frac{-8,5920kg/s}{399,2385kg} + \frac{(-0,3315kg)(-235,3309kg/s)}{399,2385kg(399,2385kg - (-13,6375kg))} = -0,0210 \quad 1/s$$

### Fuerza normal debido a la velocidad axial

$$z_u = \frac{\dot{Z}_u}{m - \dot{Z}_w} \quad (8.117)$$

$$z_u = \frac{-235,3309kg/s}{399,2385kg - (-13,6375kg)} = -0,5700 \quad 1/s$$

### Momento de cabeceo debido a la velocidad axial

$$m_u = \frac{\dot{M}_u}{I_y} + \frac{\dot{Z}_u \dot{M}_w}{I_y(m - \dot{Z}_w)} \quad (8.118)$$

$$m_u = \frac{0,3377kgm/s}{1225,580kgm^2} + \frac{(-235,3309g/s)(-69,6193kgm)}{1225,580kgm^2(399,2385kg - (-13,6375kg))} = 0,0327 \quad 1/ms$$

**Fuerza axial debido a la velocidad normal**

$$x_w = \frac{\dot{X}_w}{m} + \frac{\dot{X}_w \dot{Z}_w}{m(m - \dot{Z}_w)} \quad (8.119)$$

$$x_w = \frac{111,1356kg/s}{399,2385kg} + \frac{(-0,3315kg)(-1321,815kg/s)}{399,2385kg(399,2385kg - (-13,6375kg))} = 0,2810 \quad 1/s$$

**Fuerza normal debido a la velocidad normal**

$$z_w = \frac{\dot{Z}_w}{m - \dot{Z}_w} \quad (8.120)$$

$$z_w = \frac{-1321,815kg/s}{399,2385kg - (-13,6375kg)} = -3,2015 \quad 1/s$$

**Momento de cabeceo debido a la velocidad normal**

$$m_w = \frac{\dot{M}_w}{I_y} + \frac{\dot{Z}_w \dot{M}_w}{I_y(m - \dot{Z}_w)} \quad (8.121)$$

$$m_w = \frac{-377,5182kgm/s}{1225,580kgm^2} + \frac{(-1321,815kg/s)(-69,6193kgm)}{1225,580kgm^2(399,2385kg - (-13,6375kg))} = -0,12621/m/s$$

**Fuerza axial debido a la tasa de cabeceo**

$$x_q = \frac{(\dot{X}_q - mW_e)}{m} + \frac{(\dot{Z}_q + mU_e) \dot{X}_w}{m(m - \dot{Z}_w)} \quad (8.122)$$

$$x_q = \frac{(-16,4337kgm/s - (399,2385kg)(0m/s))}{399,2385kg} + \frac{(-676,0447kgm/s + (399,2385kg)(21,0109m/s))(-0,3315kg)}{399,2385kg(399,2385kg - (-13,6375kg))}$$

$$x_q = -0,0567 \quad m/s$$

**Fuerza normal debido a la tasa de cabeceo**

$$z_q = \frac{(\dot{Z}_q + mU_e)}{m - \dot{Z}_w} \quad (8.123)$$

$$z_q = \frac{(-676,0447kgm/s + (399,2385kg)(21,0109m/s))}{399,2385kg - (-13,6375kg)} = 18,6795 \quad m/s$$

**Momento de cabeceo debido a la tasa de cabeceo**

$$m_q = \frac{\dot{M}_q}{I_y} + \frac{(\dot{Z}_q + mU_e) \dot{M}_w}{I_y(m - \dot{Z}_w)} \quad (8.124)$$

$$m_q = \frac{-3451,2099kgm^2/s}{1225,580kgm^2} + \frac{(-676,0447kgm/s + (399,2385kg)(21,0109m/s))(-69,6193kgm)}{1225,580kgm^2(399,2385kg - (-13,6375kg))} = -3,8771 \quad 1/s$$

$$x_\theta = -g \cos \theta_e - \frac{\dot{X}_{\dot{w}} g \sin \theta_e}{m - \dot{Z}_{\dot{w}}} \quad (8.125)$$

$$x_\theta = -(9,81m/s^2) \cos 0 - \frac{(-0,3315kg)(9,81m/s^2) \sin 0}{399,2385kg - (-13,6375kg)} = -9,81m/s^2$$

$$z_\theta = -\frac{mg \sin \theta_e}{m - \dot{Z}_{\dot{w}}} \quad (8.126)$$

$$z_\theta = -\frac{(399,2385kg)(9,81m/s^2) \sin 0}{399,2385kg - (-13,6375kg)} = 0m/s^2$$

$$m_\theta = -\frac{\dot{M}_{\dot{w}} mg \sin \theta_e}{I_y (m - \dot{Z}_{\dot{w}})} \quad (8.127)$$

$$m_\theta = -\frac{(-69,6193kgm)(399,2385kg)(9,81m/s^2) \sin 0}{1225,580kgm^2 (399,2385kg - (-13,6375kg))} = 0 \quad 1/s^2$$

#### Fuerza axial debido al elevador

$$x_\eta = \frac{\dot{X}_\eta}{m} + \frac{\dot{X}_{\dot{w}} \dot{Z}_\eta}{m (m - \dot{Z}_{\dot{w}})} \quad (8.128)$$

$$x_\eta = \frac{-50,5437N}{399,2385kg} + \frac{(-0,3315kg)(-2079,2579N)}{399,2385kg (399,2385kg - (-13,6375kg))} = -0,1224m/s^2$$

#### Fuerza normal debido al elevador

$$z_\eta = \frac{\dot{Z}_\eta}{m - \dot{Z}_{\dot{w}}} \quad (8.129)$$

$$z_\eta = \frac{-2079,2579N}{399,2385kg - (-13,6375kg)} = -5,0360m/s^2$$

#### Momento de cabeceo debido al elevador

$$m_\eta = \frac{\dot{M}_\eta}{I_y} + \frac{\dot{M}_{\dot{w}} \dot{Z}_\eta}{I_y (m - \dot{Z}_{\dot{w}})} \quad (8.130)$$

$$m_\eta = \frac{-10614,6179Nm}{1225,580kgm^2} + \frac{(-69,6193kgm)(-2079,2579N)}{1225,580kgm^2 (399,2385kg - (-13,6375kg))} = -8,3748 \quad 1/s^2$$

## Eje lateral-direccional

### Fuerza lateral debido al deslizamiento lateral

$$y_v = \frac{\dot{Y}_v}{m} \quad (8.131)$$

$$y_v = \frac{-84,4525kg/s}{399,2385kg} = -0,2115 \quad 1/s$$

### Fuerza lateral debido a la tasa de balanceo

$$y_p = \frac{\dot{Y}_p + mW_e}{m} \quad (8.132)$$

$$y_p = \frac{-159,5547kgm/s + (399,2385kg)(0m/s)}{399,2385kg} = -0,3996m/s$$

### Fuerza lateral debido a la tasa de guiñada

$$y_r = \frac{\dot{Y}_r - mU_e}{m} \quad (8.133)$$

$$y_r = \frac{388,3024kgm/s - (399,2385kg)(21,0109m/s)}{399,2385kg} = -20,0383m/s$$

$$y_\phi = g \cos \theta_e \quad (8.134)$$

$$y_\phi = (9,81m/s^2) \cos 0 = 9,81m/s^2$$

$$y_\psi = g \sin \theta_e \quad (8.135)$$

$$y_\psi = (9,81m/s^2) \sin 0 = 0m/s^2$$

### Momento de balanceo debido a deslizamiento lateral

$$l_v = \frac{I_z \dot{L}_v + I_{xz} \dot{N}_v}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (8.136)$$

$$l_v = \frac{(2728,930kgm^2)(-356,3108kgm/s) + (-104,369kgm^2)(388,3024kgm/s)}{(1762,410kgm^2)(2728,930kgm^2) - (-104,369kgm^2)^2}$$

$$l_v = -0,2111 \quad 1/ms$$

### Momento de balanceo debido a la tasa de balanceo

$$l_p = \frac{I_z \dot{L}_p + I_{xz} \dot{N}_p}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (8.137)$$

$$l_p = \frac{(2728,930kgm^2)(-19369,9107kgm^2/s)+(-104,369kgm^2)(-1628,5832kgm^2/s)}{(1762,410kgm^2)(2728,930kgm^2)-(-104,369kgm^2)^2}$$

$$l_p = -10,9801 \quad 1/s$$

**Momento de balanceo debido a la tasa de guiñada**

$$l_r = \frac{I_z \dot{L}_r + I_{xz} \dot{N}_r}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (8.138)$$

$$l_r = \frac{(2728,930kgm^2)(4012,2818kgm^2/s)+(-104,369kgm^2)(-1914,8439kgm^2/s)}{(1762,410kgm^2)(2728,930kgm^2)-(-104,369kgm^2)^2}$$

$$l_r = 2,3234 \quad 1/s$$

$$l_\phi = 0 \quad 1/s^2 \quad (8.139)$$

$$l_\psi = 0 \quad 1/s^2 \quad (8.140)$$

**Momento de guiñada debido al deslizamiento lateral**

$$n_v = \frac{I_x \dot{N}_v + I_{xz} \dot{L}_v}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (8.141)$$

$$n_v = \frac{(1762,410kgm^2)(388,3024kgm/s)+(-104,369kgm^2)(-356,3108kgm/s)}{(1762,410kgm^2)(2728,930kgm^2)-(-104,369kgm^2)^2}$$

$$n_v = 0,1504 \quad 1/ms$$

**Momento de guiñada debido a la tasa guiñada**

$$n_p = \frac{I_x \dot{N}_p + I_{xz} \dot{L}_p}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (8.142)$$

$$n_p = \frac{(1762,410kgm^2)(-1628,5832kgm^2/s)+(-104,369kgm^2)(-19369,9107kgm^2/s)}{(1762,410kgm^2)(2728,930kgm^2)-(-104,369kgm^2)^2}$$

$$n_p = -0,1768 \quad 1/s$$

**Momento de guiñada debido a la tasa de guiñada**

$$n_r = \frac{I_x \dot{N}_r + I_{xz} \dot{L}_r}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (8.143)$$

$$n_r = \frac{(1762,410kgm^2)(-1914,8439kgm^2/s)+(-104,369kgm^2)(4012,2818kgm^2/s)}{(1762,410kgm^2)(2728,930kgm^2)-(-104,369kgm^2)^2}$$

$$n_r = -0,7905 \quad 1/s$$

$$n_\phi = 0 \quad 1/s^2 \quad (8.144)$$

$$n_\psi = 0 \quad 1/s^2 \quad (8.145)$$

**Fuerza lateral debido al alerón**

$$y_\xi = \frac{\dot{Y}_\xi}{m} \quad (8.146)$$

$$y_\xi = \frac{0N}{399,2385kg} = 0m/s^2$$

**Momento de balanceo debido al alerón**

$$l_\xi = \frac{I_z \dot{L}_\xi + I_{xz} \dot{N}_\xi}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (8.147)$$

$$l_\xi = \frac{(2728,930kgm^2)(-25402,6915Nm) + (-104,369kgm^2)(-384,5487Nm)}{(1762,410kgm^2)(2728,930kgm^2) - (-104,369kgm^2)^2}$$

$$l_\xi = -14,4380 \quad 1/s^2$$

**Momento de guiñada debido al alerón**

$$n_\xi = \frac{I_x \dot{N}_\xi + I_{xz} \dot{L}_\xi}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (8.148)$$

$$n_\xi = \frac{(1762,410kgm^2)(-384,5487Nm) + (-104,369kgm^2)(-25402,6915Nm)}{(1762,410kgm^2)(2728,930kgm^2) - (-104,369kgm^2)^2}$$

$$n_\xi = 0,4113 \quad 1/s^2$$

**Fuerza lateral debido al rudder**

$$y_\zeta = \frac{\dot{Y}_\zeta}{m} \quad (8.149)$$

$$y_\zeta = \frac{1140,1994N}{399,2385kg} = 2,8559 \quad m/s^2$$

**Momento de balanceo debido al rudder**

$$l_\zeta = \frac{I_z \dot{L}_\zeta + I_{xz} \dot{N}_\zeta}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (8.150)$$

$$l_\zeta = \frac{(2728,930kgm^2)(1686,7173Nm) + (-104,369kgm^2)(-5242,4977Nm)}{(1762,410kgm^2)(2728,930kgm^2) - (-104,369kgm^2)^2}$$

$$l_\zeta = 1,0732 \quad 1/s^2$$

### Momento de guiñada debido al rudder

$$n_{\zeta} = \frac{I_x \dot{N}_{\zeta} + I_{xz} \dot{L}_{\zeta}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \quad (8.151)$$

$$n_{\zeta} = \frac{(1762,410 \text{kgm}^2)(-5242,4977 \text{Nm}) + (-104,369 \text{kgm}^2)(1686,7173 \text{Nm})}{(1762,410 \text{kgm}^2)(2728,930 \text{kgm}^2) - (-104,369 \text{kgm}^2)^2}$$

$$n_{\zeta} = -1,9621 \quad 1/s^2$$

Cuadro 8.15: Derivadas longitudinales simplificadas

$x_u = -0,021 \text{ 1/s}$	$z_u = -0,57 \text{ 1/s}$	$m_u = 0,0327 \text{ 1/ms}$
$x_w = 0,281 \text{ 1/s}$	$z_w = -3,2015 \text{ 1/s}$	$m_w = -0,1262 \text{ 1/ms}$
$x_q = -0,0567 \text{ m/s}$	$z_q = 18,6795 \text{ m/s}$	$m_q = -3,8771 \text{ 1/s}$
$x_{\theta} = -9,81 \text{ m/s}^2$	$z_{\theta} = 0 \text{ m/s}^2$	$m_{\theta} = 0 \text{ 1/s}^2$
$x_{\eta} = -0,1224 \text{ m/s}^2$	$z_{\eta} = -5,036 \text{ m/s}^2$	$m_{\eta} = -8,3748 \text{ 1/s}^2$

Cuadro 8.16: Derivadas lateral-direccional simplificadas.

$y_v = -0,2115 \text{ 1/s}$	$l_v = -0,2111 \text{ 1/ms}$	$n_v = 0,1504 \text{ 1/ms}$
$y_p = -0,3996 \text{ m/s}$	$l_p = -10,9801 \text{ 1/s}$	$n_p = -0,1768 \text{ 1/s}$
$y_r = -20,0383 \text{ m/s}$	$l_r = 2,3234 \text{ 1/s}$	$n_r = -0,7905 \text{ 1/s}$
$y_{\phi} = 9,81 \text{ m/s}^2$	$l_{\phi} = 0 \text{ 1/s}^2$	$n_{\phi} = 0 \text{ 1/s}^2$
$y_{\psi} = 0 \text{ m/s}^2$	$l_{\psi} = 0 \text{ 1/s}^2$	$n_{\psi} = 0 \text{ 1/s}^2$
$y_{\xi} = 0 \text{ m/s}^2$	$l_{\xi} = -14,438 \text{ 1/s}^2$	$n_{\xi} = 0,4113 \text{ 1/s}^2$
$y_{\zeta} = 2,8559 \text{ m/s}^2$	$l_{\zeta} = 1,0732 \text{ 1/s}^2$	$n_{\zeta} = -1,9621 \text{ 1/s}^2$

### 8.2.3 Funciones de transferencia

Para determinar las funciones de transferencia nos apoyamos de las reglas de transformadas de Laplace, ecuación 2.14, a partir de las ecuaciones de movimiento, sección 8.2.1.

#### Eje longitudinal

Teniendo en cuenta la ecuación 8.55, asumiendo  $\dot{\theta}_{(t)} = q_{(t)}$  bajo las reglas de Laplace, obtenemos:

$$\begin{aligned} (ms - \dot{X}_u)u_{(s)} - (\dot{X}_{\dot{w}}s + \dot{X}_w)w_{(s)} - (\dot{X}_qs - mg)\theta_{(s)} &= \dot{X}_{\eta}\eta_{(s)} \\ -\dot{Z}_u u_{(s)} - ((\dot{Z}_{\dot{w}} - m)s + \dot{Z}_w)w_{(s)} - (\dot{Z}_qs + mU_e s)\theta_{(s)} &= \dot{Z}_{\eta}\eta_{(s)} \\ -\dot{M}_u u_{(s)} - (\dot{M}_{\dot{w}}s + \dot{M}_w)w_{(s)} + (I_y s^2 - \dot{M}_q s)\theta_{(s)} &= \dot{M}_{\eta}\eta_{(s)} \end{aligned} \quad (8.152)$$

$$\begin{bmatrix} (ms - \dot{X}_u) & -(\dot{X}_{\dot{w}}s + \dot{X}_w) & -(\dot{X}_qs - mg) \\ -\dot{Z}_u & -((\dot{Z}_{\dot{w}} - m)s + \dot{Z}_w) & -(\dot{Z}_qs + mU_e s) \\ -\dot{M}_u & -(\dot{M}_{\dot{w}}s + \dot{M}_w) & (I_y s^2 - \dot{M}_q s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ w(s) \\ \theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}_\eta \\ \dot{Z}_\eta \\ \dot{M}_\eta \end{bmatrix} \eta(s) \quad (8.153)$$

$$\begin{bmatrix} (ms - \dot{X}_u) & -(\dot{X}_{\dot{w}}s + \dot{X}_w) & -(\dot{X}_qs - mg) \\ -\dot{Z}_u & -((\dot{Z}_{\dot{w}} - m)s + \dot{Z}_w) & -(\dot{Z}_qs + mU_e s) \\ -\dot{M}_u & -(\dot{M}_{\dot{w}}s + \dot{M}_w) & (I_y s^2 - \dot{M}_q s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u(s)}{\eta(s)} \\ \frac{w(s)}{\eta(s)} \\ \frac{\theta(s)}{\eta(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}_\eta \\ \dot{Z}_\eta \\ \dot{M}_\eta \end{bmatrix} \quad (8.154)$$

$$\frac{u(s)}{\eta(s)} = N_\eta^u(s); \quad \frac{w(s)}{\eta(s)} = N_\eta^w(s); \quad \frac{\theta(s)}{\eta(s)} = N_\eta^\theta(s); \quad \frac{q(s)}{\eta(s)} = sN_\eta^\theta(s)$$

De esta manera, para calcular las funciones de transferencia en respuesta del elevador aplicamos la regla de Cramer a la ecuación 8.154:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \begin{bmatrix} (ms - \dot{X}_u) & -(\dot{X}_{\dot{w}}s + \dot{X}_w) & -(\dot{X}_qs - mg) \\ -\dot{Z}_u & -((\dot{Z}_{\dot{w}} - m)s + \dot{Z}_w) & -(\dot{Z}_qs + mU_e s) \\ -\dot{M}_u & -(\dot{M}_{\dot{w}}s + \dot{M}_w) & (I_y s^2 - \dot{M}_q s) \end{bmatrix} \\ \frac{u(s)}{\eta(s)} &= \begin{bmatrix} \dot{X}_\eta & -(\dot{X}_{\dot{w}}s + \dot{X}_w) & -(\dot{X}_qs - mg) \\ \dot{Z}_\eta & -((\dot{Z}_{\dot{w}} - m)s + \dot{Z}_w) & -(\dot{Z}_qs + mU_e s) \\ \dot{M}_\eta & -(\dot{M}_{\dot{w}}s + \dot{M}_w) & (I_y s^2 - \dot{M}_q s) \end{bmatrix} \\ \frac{w(s)}{\eta(s)} &= \begin{bmatrix} (ms - \dot{X}_u) & \dot{X}_\eta & -(\dot{X}_qs - mg) \\ -\dot{Z}_u & \dot{Z}_\eta & -(\dot{Z}_qs + mU_e s) \\ -\dot{M}_u & \dot{M}_\eta & (I_y s^2 - \dot{M}_q s) \end{bmatrix} \\ \frac{\theta(s)}{\eta(s)} &= \begin{bmatrix} (ms - \dot{X}_u) & -(\dot{X}_{\dot{w}}s + \dot{X}_w) & \dot{X}_\eta \\ -\dot{Z}_u & -((\dot{Z}_{\dot{w}} - m)s + \dot{Z}_w) & \dot{Z}_\eta \\ -\dot{M}_u & -(\dot{M}_{\dot{w}}s + \dot{M}_w) & \dot{M}_\eta \end{bmatrix} \\ \frac{q(s)}{\eta(s)} &= \begin{bmatrix} (ms - \dot{X}_u) & -(\dot{X}_{\dot{w}}s + \dot{X}_w) & \dot{X}_\eta \\ -\dot{Z}_u & -((\dot{Z}_{\dot{w}} - m)s + \dot{Z}_w) & \dot{Z}_\eta \\ -\dot{M}_u & -(\dot{M}_{\dot{w}}s + \dot{M}_w) & \dot{M}_\eta \end{bmatrix} (s) \end{aligned} \quad (8.155)$$

Reemplazando los valores dimensionales de las derivadas de estabilidad y control aerodinámico en el eje longitudinal, obtenemos:

$$\frac{N_\eta^u(s)}{\Delta(s)} = \frac{-0,1224s^3 - 1,807s^2 + 32,38s + 256,8}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} m/s \quad (8.156)$$

$$\frac{N_\eta^w(s)}{\Delta(s)} = \frac{-5,036s^3 - 176s^2 - 3,788s - 48,44}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} m/s \quad (8.157)$$

$$\frac{N_\eta^\theta(s)}{\Delta(s)} = \frac{-8,375s^2 - 26,36s - 1,96}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} \circ \quad (8.158)$$

$$\frac{N_\eta^q(s)}{\Delta(s)} = \frac{-8,375s^3 - 26,36s^2 - 1,96s}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} \circ/s \quad (8.159)$$

### Eje lateral-direccional

Teniendo en cuenta la ecuación 8.56, bajo las reglas de Laplace, obtenemos:

$$\begin{aligned} (ms - \dot{Y}_v)v(s) - (\dot{Y}_p s + mg)\phi(s) - (\dot{Y}_r s - mU_e s)\psi(s) &= \dot{Y}_\xi \xi + \dot{Y}_\zeta \zeta \\ -\dot{L}_v v(s) + (I_x s^2 - \dot{L}_p s)\phi(s) - (I_{xz} s^2 + \dot{L}_r s)\psi(s) &= \dot{L}_\xi \xi + \dot{L}_\zeta \zeta \\ -\dot{N}_v v(s) - (I_{xz} s^2 + \dot{N}_p s)\phi(s) + (I_z s^2 - \dot{N}_r s)\psi(s) &= \dot{N}_\xi \xi + \dot{N}_\zeta \zeta \end{aligned} \quad (8.160)$$

$$\begin{bmatrix} (ms - \dot{Y}_v) & -(\dot{Y}_p s + mg) & -(\dot{Y}_r s - mU_e s) \\ -\dot{L}_v & (I_x s^2 - \dot{L}_p s) & -(I_{xz} s^2 + \dot{L}_r s) \\ -\dot{N}_v & -(I_{xz} s^2 + \dot{N}_p s) & (I_z s^2 - \dot{N}_r s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(s) \\ \phi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_\xi & \dot{Y}_\zeta \\ \dot{L}_\xi & \dot{L}_\zeta \\ \dot{N}_\xi & \dot{N}_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(s) \\ \zeta(s) \end{bmatrix} \quad (8.161)$$

Para determinar las funciones de transferencia en respuesta del alerón asumimos que el rudder está en equilibrio  $\zeta(s) = 0$ .

$$\begin{bmatrix} (ms - \dot{Y}_v) & -(\dot{Y}_p s + mg) & -(\dot{Y}_r s - mU_e s) \\ -\dot{L}_v & (I_x s^2 - \dot{L}_p s) & -(I_{xz} s^2 + \dot{L}_r s) \\ -\dot{N}_v & -(I_{xz} s^2 + \dot{N}_p s) & (I_z s^2 - \dot{N}_r s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(s) \\ \phi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_\xi \\ \dot{L}_\xi \\ \dot{N}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(s) \end{bmatrix} \quad (8.162)$$

$$\begin{bmatrix} (ms - \dot{Y}_v) & -(\dot{Y}_p s + mg) & -(\dot{Y}_r s - mU_e s) \\ -\dot{L}_v & (I_x s^2 - \dot{L}_p s) & -(I_{xz} s^2 + \dot{L}_r s) \\ -\dot{N}_v & -(I_{xz} s^2 + \dot{N}_p s) & (I_z s^2 - \dot{N}_r s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(s) \\ \xi(s) \\ \phi(s) \\ \xi(s) \\ \psi(s) \\ \xi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_\xi \\ \dot{L}_\xi \\ \dot{N}_\xi \end{bmatrix} \quad (8.163)$$

$$\frac{v(s)}{\xi(s)} = N_\xi^v(s); \frac{\phi(s)}{\xi(s)} = N_\xi^\phi(s); \frac{p(s)}{\xi(s)} = sN_\xi^\phi(s); \frac{\psi(s)}{\xi(s)} = N_\xi^\psi(s); \frac{r(s)}{\xi(s)} = sN_\xi^\psi(s)$$

$$\frac{N_\xi^v(s)}{\Delta(s)} = \frac{-2,471s^3 - 279,1s^2 - 102,6s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} m/s \quad (8.164)$$

$$\frac{N_\xi^\phi(s)}{\Delta(s)} = \frac{-14,44s^3 - 13,51s^2 - 43,97s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \circ \quad (8.165)$$

$$\frac{N_{\xi}^p(s)}{\Delta(s)} = \frac{-14,44s^4 - 13,51s^3 - 43,97s^2}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \circ/s \quad (8.166)$$

$$\frac{N_{\xi}^{\psi}(s)}{\Delta(s)} = \frac{0,4113s^3 + 7,156s^2 + 2,328s - 20,45}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \circ \quad (8.167)$$

$$\frac{N_{\xi}^r(s)}{\Delta(s)} = \frac{0,4113s^4 + 7,156s^3 + 2,328s^2 - 20,45s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \circ/s \quad (8.168)$$

De la misma manera, para determinar las funciones de transferencia en respuesta del rudder asumimos que el alerón está en equilibrio  $\xi(s) = 0$ .

$$\begin{bmatrix} (ms - \dot{Y}_v) & -(\dot{Y}_p s + mg) & -(\dot{Y}_r s - mU_e s) \\ -\dot{L}_v & (I_x s^2 - \dot{L}_p s) & -(I_{xz} s^2 + \dot{L}_r s) \\ -\dot{N}_v & -(I_{xz} s^2 + \dot{N}_p s) & (I_z s^2 - \dot{N}_r s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(s) \\ \phi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{\zeta} \\ \dot{L}_{\zeta} \\ \dot{N}_{\zeta} \end{bmatrix} [\zeta(s)] \quad (8.169)$$

$$\begin{bmatrix} (ms - \dot{Y}_v) & -(\dot{Y}_p s + mg) & -(\dot{Y}_r s - mU_e s) \\ -\dot{L}_v & (I_x s^2 - \dot{L}_p s) & -(I_{xz} s^2 + \dot{L}_r s) \\ -\dot{N}_v & -(I_{xz} s^2 + \dot{N}_p s) & (I_z s^2 - \dot{N}_r s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(s) \\ \zeta(s) \\ \phi(s) \\ \zeta(s) \\ \psi(s) \\ \zeta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{\zeta} \\ \dot{L}_{\zeta} \\ \dot{N}_{\zeta} \end{bmatrix} \quad (8.170)$$

$$\frac{v(s)}{\zeta(s)} = N_{\zeta}^v(s); \frac{\phi(s)}{\zeta(s)} = N_{\zeta}^{\phi}(s); \frac{p(s)}{\zeta(s)} = sN_{\zeta}^{\phi}(s); \frac{\psi(s)}{\zeta(s)} = N_{\zeta}^{\psi}(s); \frac{r(s)}{\zeta(s)} = sN_{\zeta}^{\psi}(s)$$

$$\frac{N_{\zeta}^v(s)}{\Delta(s)} = \frac{2,856s^4 + 72,51s^3 + 473,5s^2 - 36,4s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} m/s \quad (8.171)$$

$$\frac{N_{\zeta}^{\phi}(s)}{\Delta(s)} = \frac{1,073s^3 - 4,086s^2 - 5,329s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \circ \quad (8.172)$$

$$\frac{N_{\zeta}^p(s)}{\Delta(s)} = \frac{1,073s^4 - 4,086s^3 - 5,329s^2}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \circ/s \quad (8.173)$$

$$\frac{N_{\zeta}^{\psi}(s)}{\Delta(s)} = \frac{-1,962s^3 - 21,72s^2 + 0,3253s - 2,48}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \circ \quad (8.174)$$

$$\frac{N_{\zeta}^r(s)}{\Delta(s)} = \frac{-1,962s^4 - 21,72s^3 + 0,3253s^2 - 2,48s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \circ/s \quad (8.175)$$

## 8.2.4 Respuesta de controles

### Respuestas de variables de perturbación

Partiendo de la expresión por cada función de transferencia, por ejemplo: velocidad axial debido al elevador, ecuación 8.156.

$$\frac{u(s)}{\eta(s)} = \frac{N_{\eta}^u(s)}{\Delta(s)} \quad (8.176)$$

La respuesta en términos de Laplace como variable de perturbación de la velocidad axial en  $m/s$  estará dada por:

$$u(s) = \frac{N_{\eta}^u(s)}{\Delta(s)} \eta(s) \quad (8.177)$$

Asumiendo para todos los controles y variables de perturbación que  $N_{\eta}^u(s)$  y  $\Delta(s)$  forman la función de transferencia característica y  $\eta(s)$  será la entrada en radianes ó grados de la superficie de control primaria, en este caso del elevador, en términos de Laplace siendo denotada como impulsos  $\eta(s) = k$  o escalones  $\eta(s) = k/s$ . Así, para obtener las respuestas de variables de perturbación en controles del elevador, alerón y rudder en un instante cero e infinito podemos aplicar el teorema de valor inicial y valor final, sección 2.4.6:

$$\begin{aligned} u(s) &= \frac{N_{\eta}^u(s)}{\Delta(s)} \eta(s) \\ u(s) &= \frac{-0,1224s^3 - 1,807s^2 + 32,38s + 256,8}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} * \frac{k}{s} m/s \\ u(s) &= \frac{-0,1224s^3 - 1,807s^2 + 32,38s + 256,8}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} * \frac{1}{s} m/s \\ u(t)_{t \rightarrow \infty} &= \lim_{s \rightarrow 0} (su(s)) \\ u(t)_{t \rightarrow \infty} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \left( \frac{-0,1224s^3 - 1,807s^2 + 32,38s + 256,8}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} * \frac{1}{s} \right) \right) m/s \\ u(t)_{t \rightarrow \infty} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{-0,1224s^3 - 1,807s^2 + 32,38s + 256,8}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} \right) m/s \\ u(t)_{t \rightarrow \infty} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{-0,1224(0)^3 - 1,807(0)^2 + 32,38(0) + 256,8}{(0)^4 + 7,1(0)^3 + 15,08(0)^2 + 1,091(0) + 1,731} \right) m/s \\ u(t) &= \frac{256,8}{1,731} m/s \\ u(t) &= 148,3467 \quad m/s \end{aligned} \quad (8.178)$$

De esta forma, las respuestas por variables de perturbación por cada función de transferencia estarán dadas en el cuadro 9.2.

### Funciones de transferencia de respuesta de aceleraciones

A igual que las respuesta en controles aerodinámicos, las respuestas de aceleraciones son requerimientos importantes, pero no dadas directamente por las funciones de transferencia. Las expresiones para las componentes de aceleraciones inerciales pueden disminuir

o aumentar en sus contribuciones dependiendo el eje y control aerodinámico analizado.

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{u} - rV_e + qW_e - y\dot{r} + z\dot{q} \\ a_y &= \dot{v} - pW_e + rU_e + x\dot{r} - z\dot{p} \\ a_z &= \dot{w} - qU_e + pV_e - x\dot{q} + y\dot{p} \end{aligned} \quad (8.179)$$

De esta forma, desde que el origen  $O$  esté ubicado en el centro de gravedad y que ninguna carga puntual lo variará, asumimos que  $x = y = z = 0$ , por lo tanto obtenemos:

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{u} - rV_e + qW_e \\ a_y &= \dot{v} - pW_e + rU_e \\ a_z &= \dot{w} - qU_e + pV_e \end{aligned} \quad (8.180)$$

Aplicando la reglas de transformadas de Laplace:

$$\begin{aligned} a_{x(s)} &= su(s) - s\psi(s)V_e + s\theta(s)W_e \\ a_{y(s)} &= sv(s) - s\phi(s)W_e + s\psi(s)U_e \\ a_{z(s)} &= sw(s) - s\theta(s)U_e + s\phi(s)V_e \end{aligned} \quad (8.181)$$

Las respuestas en aceleraciones pueden ser en términos del rudder, elevador y alerones. Por lo tanto, para cada control habrá una componente de aceleración en cada eje. Así, para la aceleración axial  $a_{x(s)}$  en términos del elevador  $\eta$  obtenemos:

$$\begin{aligned} a_{x(s)} &= su(s) - s\psi(s)V_e + s\theta(s)W_e \\ u(s) &= \frac{N_\eta^u(s)}{\Delta(s)}\eta(s) \quad \theta(s) = \frac{N_\eta^\theta(s)}{\Delta(s)}\eta(s) \\ a_{x(s)} &= s\frac{N_\eta^u(s)}{\Delta(s)}\eta(s) + s\frac{N_\eta^\theta(s)}{\Delta(s)}\eta(s)W_e \\ a_{x(s)} &= s\eta(s) \left( \frac{N_\eta^u(s) + N_\eta^\theta(s)W_e}{\Delta(s)} \right) \\ \frac{a_{x(s)}}{\eta(s)} &= s \left( \frac{N_\eta^u(s) + N_\eta^\theta(s)W_e}{\Delta(s)} \right) \end{aligned} \quad (8.182)$$

Aplicando el anterior procedimiento para el rudder, elevador y alerón, con las reducciones necesarias, podemos obtener las funciones de transferencia en aceleraciones inerciales axiales, normales y laterales con sus respectivas respuestas bajo el teorema de valor inicial y valor final 2.4.6.

*Aceleración axial debido al elevador:*

$$\frac{a_{x(s)}}{\eta(s)} = s \left( \frac{N_\eta^u(s) + N_\eta^\theta(s)W_e}{\Delta(s)} \right) \quad (8.183)$$

$$\frac{a_{x(s)}}{\eta(s)} = \frac{-0,1224s^4 - 1,807s^3 + 32,38s^2 + 256,8s}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} m/s^2 \quad (8.184)$$

*Aceleración lateral debido al elevador:*

$$\frac{a_{y(s)}}{\eta(s)} = 0 m/s^2 \quad (8.185)$$

*Aceleración normal debido al elevador:*

$$\frac{a_{z(s)}}{\eta(s)} = s \left( \frac{N_\eta^w(s) - N_\eta^\theta(s)U_e}{\Delta(s)} \right) \quad (8.186)$$

$$\frac{a_{z(s)}}{\eta(s)} = \frac{-5,036s^4 - 0,03622s^3 + 550s^2 - 7,255s}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} m/s^2 \quad (8.187)$$

*Aceleración axial debido al alerón:*

$$\frac{a_{x(s)}}{\xi(s)} = -s \frac{N_\xi^\psi(s)}{\Delta(s)} V_e \quad (8.188)$$

$$\frac{a_{x(s)}}{\xi(s)} = 0 m/s^2 \quad (8.189)$$

*Aceleración lateral debido al alerón:*

$$\frac{a_{y(s)}}{\xi(s)} = s \left( \frac{N_\xi^v(s) - N_\xi^\phi(s)W_e + N_\xi^\psi(s)U_e}{\Delta(s)} \right) \quad (8.190)$$

$$\frac{a_{y(s)}}{\xi(s)} = \frac{6,17s^4 - 128,8s^3 - 53,68s^2 - 429,6s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} m/s^2 \quad (8.191)$$

*Aceleración normal debido al alerón:*

$$\frac{a_{z(s)}}{\xi(s)} = s \frac{N_\xi^\phi(s)}{\Delta(s)} V_e \quad (8.192)$$

$$\frac{a_{z(s)}}{\xi(s)} = 0 m/s^2 \quad (8.193)$$

*Aceleración axial debido al rudder:*

$$\frac{a_{x(s)}}{\zeta(s)} = -s \frac{N_\zeta^\psi(s)}{\Delta(s)} V_e \quad (8.194)$$

$$\frac{a_{x(s)}}{\zeta(s)} = 0 m/s^2 \quad (8.195)$$

*Aceleración lateral debido al rudder:*

$$\frac{a_{y(s)}}{\zeta(s)} = s \left( \frac{N_{\zeta}^v(s) - N_{\zeta}^{\phi}(s)W_e + N_{\zeta}^{\psi}(s)U_e}{\Delta(s)} \right) \quad (8.196)$$

$$\frac{a_{y(s)}}{\zeta(s)} = \frac{2,856s^5 + 31,28s^4 + 17,14s^3 - 29,56s^2 - 52,1s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} m/s^2 \quad (8.197)$$

*Aceleración normal debido al rudder:*

$$\frac{a_{z(s)}}{\zeta(s)} = s \frac{N_{\zeta}^{\phi}(s)}{\Delta(s)} V_e \quad (8.198)$$

$$\frac{a_{z(s)}}{\zeta(s)} = 0 m/s^2 \quad (8.199)$$

De esta forma, las respuestas por aceleraciones inercial por cada eje y control aerodinámico estarán dadas en el cuadro 9.4.

### Velocidades totales

Calculando las respuestas por variables de perturbación, cuadro 9.2, podemos brindar una descripción de velocidades en equilibrio con respecto a las velocidades bajo perturbaciones para obtener la velocidad total en cada eje.

$$U = U_e + u$$

$$V = V_e + v$$

$$W = W_e + w$$

$$U = 21,0109m/s + 148,3467m/s = 169,3576m/s \quad (8.200)$$

$$V_{\zeta} = 0m/s + 57,3086m/s = 57,3086m/s$$

$$V_{\psi} = 0m/s + 20,3318m/s = 20,3318m/s$$

$$W = 0m/s - 27,9841m/s = -27,9841m/s$$

### Perturbación de la altura en términos de movimiento

Teniendo en cuenta la ecuación D.5, podemos brindar otra aplicación de la matriz de dirección para calcular la perturbación de la altura en términos de movimiento usando las componentes de velocidad total  $U, V, W$  y componentes de velocidad referidas a los ejes de tierra  $U_E, V_E, W_E$ .

$$\begin{bmatrix} U_E \\ V_E \\ W_E \end{bmatrix} = [D^{-1}] \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (8.201)$$

De esta forma, en la ecuación 8.201 la altitud es medida en dirección descendente

donde la tasa de cambio de la altura debido a la perturbación en el movimiento se verá reflejada en  $W_E$ .

$$\begin{aligned} \dot{h} &= W_E \\ \dot{h} &= U \sin(\theta) - V_\xi \cos(\theta) \sin(\phi) - W \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \dot{h} &= (169,4m/s) \sin(0) - (57,3m/s) \cos(0) \sin(0) - (-27,98m/s) \cos(0) \cos(0) \\ \dot{h}_\xi &= 27,98m/s \quad (8.202) \\ \dot{h} &= U \sin(\theta) - V_\zeta \cos(\theta) \sin(\phi) - W \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \dot{h} &= (169,4m/s) \sin(0) - (20,3m/s) \cos(0) \sin(0) - (-27,98m/s) \cos(0) \cos(0) \\ \dot{h}_\zeta &= 27,98m/s \end{aligned}$$

## 8.3 Respuestas de estabilidad

### 8.3.1 Estabilidad estática

#### Eje lateral-direccional

Desde que la sustentación actué en el centro aerodinámico del estabilizador vertical por encima del eje de  $OX$ , la respuesta de estabilidad estática lateral estará dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dC_L}{d\beta} &< 0 \quad (8.203) \\ \frac{dC_L}{d\beta} &= -\bar{V}_F \frac{h_F}{l_F} a_{1F} \\ \frac{dC_L}{d\beta} &= -(0,0218) \left( \frac{1,4793m}{4,5979m} \right) (5,98) \\ \frac{dC_L}{d\beta} &= -0,0419 \end{aligned}$$

#### Eje longitudinal

En el eje longitudinal, el punto neutro de control  $h_n$  y el margen de estabilidad fijo  $K_n$  determinan la estabilidad estática. Bajo el diagrama  $v - n$ , por cada maniobra y velocidad habrá una condición diferente de estabilidad garantizando la integridad de la aeronave y del piloto, cuadro 9.8.

### 8.3.2 Estabilidad dinámica

Teniendo en cuenta las funciones de transferencia longitudinales y lateral-direccionales 8.2.3, podemos hallar los modos de oscilación característicos factorizando cada función de transferencia con respecto a los modelos propuestos [5].

### Eje longitudinal

#### Velocidad axial debido al elevador (ecuación 8.156)

$$\frac{u(s)}{\eta(s)} \equiv \frac{N_{\eta}^u(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_u(s + 1/T_u)(s^2 + 2\zeta_u\omega_u s + \omega_u^2)}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)} \quad (8.204)$$

$$\frac{N_{\eta}^u(s)}{\Delta(s)} = \frac{-0,1224s^3 - 1,807s^2 + 32,38s + 256,8}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} m/s$$

$$\frac{N_{\eta}^u(s)}{\Delta(s)} = \frac{-0,1224(s - 14,219)(s^2 + 28,9821s + 147,552)}{(s^2 + 0,0178432s + 0,116668)(s^2 + 7,08216s + 14,837)} m/s$$

$$\frac{u(s)}{\eta(s)} \equiv \frac{N_{\eta}^u(s)}{\Delta(s)} = \frac{-0,1224(s - 1/0,0703)(s^2 + 2(1,192)(12,147)s + 12,147^2)}{(s^2 + 2(0,0261)(0,341)s + 0,341^2)(s^2 + 2(0,919)(3,851)s + 3,851^2)}$$

Aplicando el mismo método por cada variable de perturbación, obtenemos:

#### Velocidad normal debido al elevador (ecuación 8.157)

$$\frac{w(s)}{\eta(s)} \equiv \frac{N_{\eta}^w(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_w(s + 1/T_{\alpha})(s^2 + 2\zeta_{\alpha}\omega_{\alpha} s + \omega_{\alpha}^2)}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)} \quad (8.205)$$

$$\frac{w(s)}{\eta(s)} \equiv \frac{N_{\eta}^w(s)}{\Delta(s)} = \frac{-5,036(s + 1/0,0286)(s^2 + 2(0,013)(0,524)s + 0,524^2)}{(s^2 + 2(0,0261)(0,341)s + 0,341^2)(s^2 + 2(0,919)(3,851)s + 3,851^2)}$$

#### Ángulo de cabeceo debido al elevador (ecuación 8.158)

$$\frac{\theta(s)}{\eta(s)} \equiv \frac{N_{\eta}^{\theta}(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_{\theta}(s + (1/T_{\theta_1}))(s + (1/T_{\theta_2}))}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)} \quad (8.206)$$

$$\frac{\theta(s)}{\eta(s)} \equiv \frac{N_{\eta}^{\theta}(s)}{\Delta(s)} = \frac{-8,375(s + (1/13,123))(s + (1/0,325))}{(s^2 + 2(0,0261)(0,341)s + 0,341^2)(s^2 + 2(0,919)(3,851)s + 3,851^2)}$$

#### Tasa de cabeceo debido al elevador (ecuación 8.159)

$$\frac{q(s)}{\eta(s)} \equiv \frac{N_{\eta}^q(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_q s(s + (1/T_{\theta_1}))(s + (1/T_{\theta_2}))}{(s^2 + 2\zeta_p\omega_p s + \omega_p^2)(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)} \quad (8.207)$$

$$\frac{q(s)}{\eta(s)} \equiv \frac{N_{\eta}^q(s)}{\Delta(s)} = \frac{-8,375s(s + (1/13,123))(s + (1/0,325))}{(s^2 + 2(0,0261)(0,341)s + 0,341^2)(s^2 + 2(0,919)(3,851)s + 3,851^2)}$$

### Eje lateral-direccional

#### Velocidad lateral debido al alerón (ecuación 8.164)

$$\frac{v(s)}{\xi(s)} \equiv \frac{N_{\xi}^v(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_v(s + (1/T_{\beta_1}))(s + (1/T_{\beta_2}))}{(s + (1/T_s))(s + (1/T_r))(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)} \quad (8.208)$$

$$\frac{v(s)}{\xi(s)} \equiv \frac{N_{\xi}^v(s)}{\Delta(s)} = \frac{-2,471(s + (1/2,711))(s + (1/0,00888))}{(s - (1/21,563))(s + (1/0,0911))(s^2 + 2(0,2806)(1,875)s + 1,875^2)}$$

**Ángulo de balanceo debido al Alerón (ecuación 8.165)**

$$\frac{\phi(s)}{\xi(s)} \equiv \frac{N_{\xi}^{\phi}(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_{\phi}(s^2 + 2\zeta_{\phi}\omega_{\phi}s + \omega_{\phi}^2)}{(s + (1/T_s))(s + (1/T_r))(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)} \quad (8.209)$$

$$\frac{\phi(s)}{\xi(s)} \equiv \frac{N_{\xi}^{\phi}(s)}{\Delta(s)} = \frac{-14,44(s^2 + 2(0,268)(1,744)s + 1,744^2)}{(s - (1/21,563))(s + (1/0,0911))(s^2 + 2(0,2806)(1,875)s + 1,875^2)}$$

**Tasa de balanceo debido al Alerón (ecuación 8.166)**

$$\frac{p(s)}{\xi(s)} \equiv \frac{N_{\xi}^p(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_p s(s^2 + 2\zeta_{\phi}\omega_{\phi}s + \omega_{\phi}^2)}{(s + (1/T_s))(s + (1/T_r))(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)} \quad (8.210)$$

$$\frac{p(s)}{\xi(s)} \equiv \frac{N_{\xi}^p(s)}{\Delta(s)} = \frac{-14,44s(s^2 + 2(0,268)(1,744)s + 1,744^2)}{(s - (1/21,563))(s + (1/0,0911))(s^2 + 2(0,2806)(1,875)s + 1,875^2)}$$

**Tasa de guiñada debido al Alerón (ecuación 8.168)**

$$\frac{r(s)}{\xi(s)} \equiv \frac{N_{\xi}^r(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_r(s + (1/T_{\psi}))(s^2 + 2\zeta_{\psi}\omega_{\psi}s + \omega_{\psi}^2)}{(s + (1/T_s))(s + (1/T_r))(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)} \quad (8.211)$$

$$\frac{r(s)}{\xi(s)} \equiv \frac{N_{\xi}^r(s)}{\Delta(s)} = \frac{0,4113(s - (1/0,675))(s^2 + 2(1,628)(5,796)s + 5,796^2)}{(s - (1/21,563))(s + (1/0,0911))(s^2 + 2(0,2806)(1,875)s + 1,875^2)}$$

**Velocidad lateral debido al rudder (ecuación 8.171)**

$$\frac{v(s)}{\zeta(s)} \equiv \frac{N_{\zeta}^v(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_v(s + (1/T_{\beta_1}))(s + (1/T_{\beta_2}))(s + (1/T_{\beta_3}))}{(s + (1/T_s))(s + (1/T_r))(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)} \quad (8.212)$$

$$\frac{v(s)}{\zeta(s)} \equiv \frac{N_{\zeta}^v(s)}{\Delta(s)} = \frac{2,856(s - (1/13,16))(s^2 + 2(0,983)(12,95)s + 12,95^2)}{(s - (1/21,563))(s + (1/0,0911))(s^2 + 2(0,2806)(1,875)s + 1,875^2)}$$

**Ángulo de balanceo debido al rudder (ecuación 8.172)**

$$\frac{\phi(s)}{\zeta(s)} \equiv \frac{N_{\zeta}^{\phi}(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_{\phi}(s + (1/T_{\phi_1}))(s + (1/T_{\phi_2}))}{(s + (1/T_s))(s + (1/T_r))(s^2 + 2\zeta_d\omega_d s + \omega_d^2)} \quad (8.213)$$

$$\frac{\phi(s)}{\zeta(s)} \equiv \frac{N_{\zeta}^{\phi}(s)}{\Delta(s)} = \frac{1,073(s - (1/0,206))(s + (1/0,973))}{(s - (1/21,563))(s + (1/0,0911))(s^2 + 2(0,2806)(1,875)s + 1,875^2)}$$

**Tasa de balanceo debido al rudder (ecuación 8.173)**

$$\frac{p(s)}{\zeta(s)} \equiv \frac{N_{\zeta}^p(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_p s(s + (1/T_{\phi_1}))(s + (1/T_{\phi_2}))}{(s + (1/T_s))(s + (1/T_r))(s^2 + 2\zeta_d \omega_d s + \omega_d^2)} \quad (8.214)$$

$$\frac{p(s)}{\zeta(s)} \equiv \frac{N_{\zeta}^p(s)}{\Delta(s)} = \frac{1,073s(s - (1/0,206))(s + (1/0,973))}{(s - (1/21,563))(s + (1/0,0911))(s^2 + 2(0,2806)(1,875)s + 1,875^2)}$$

**Tasa de guiñada debido al rudder (ecuación 8.175)**

$$\frac{r(s)}{\zeta(s)} \equiv \frac{N_{\zeta}^r(s)}{\Delta(s)} = \frac{k_r(s + (1/T_{\psi}))(s^2 + 2\zeta_{\psi} \omega_{\psi} s + \omega_{\psi}^2)}{(s + (1/T_s))(s + (1/T_r))(s^2 + 2\zeta_d \omega_d s + \omega_d^2)} \quad (8.215)$$

$$\frac{r(s)}{\zeta(s)} \equiv \frac{N_{\zeta}^r(s)}{\Delta(s)} = \frac{-1,962(s + (1/0,0901))(s^2 - 2(0,0373)(0,337)s + 0,337^2)}{(s - (1/21,563))(s + (1/0,0911))(s^2 + 2(0,2806)(1,875)s + 1,875^2)}$$

**Criterio de Routh-Hurwitz**

**Eje longitudinal**

$$\Delta_{(s)_{long}} = s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731 \quad (8.216)$$

$s^4$	1	15,08	1,731
$s^3$	7,1	1,091	0
$s^2$	14,9263	1,7310	0
$s^1$	0,2676	0	0
$s^0$	1,7310	0	0

Bajo el criterio de Routh-Hurwitz, el sistema correspondiente a la ecuación 8.216 es estable, a razón que no hay cambios de signo, por lo tanto, se entiende que las raíces están ubicadas sobre el semiplano izquierdo del plano  $s$ .

$$\begin{aligned} & -8,92e - 03 \quad + \quad 3,41e - 01i \\ & -8,92e - 03 \quad - \quad 3,41e - 01i \\ & -3,54e + 00 \quad + \quad 1,52e + 00i \\ & -3,54e + 00 \quad - \quad 1,52e + 00i \end{aligned}$$

**Eje lateral direccional**

$$\Delta_{(s)_{lat}} = s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s \quad (8.217)$$

El sistema de la ecuación 8.217 es inestable, a razón que uno de los coeficientes tienen signo diferente, incumpliendo la condición de que los determinantes de Hurwitz sean positivos.

$$\begin{array}{r}
 0,00e + 00 \\
 4,64e - 02 \\
 -5,26e - 01 \quad + \quad 1,80e + 00i \\
 -5,26e - 01 \quad - \quad 1,80e + 00i \\
 -1,10e + 01
 \end{array}$$

### Control Anticipation Parameter CAP

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{q}(s)}{\eta(s)} &= \frac{m_\eta s(s - z_w)}{(s^2 - (m_q + z_w)s + (m_q z_w - m_w U_e))} \\
 \frac{\dot{q}(s)}{\eta(s)} &= \frac{(-8,375)s(s - (-3,201))}{(s^2 - ((-3,877) + (-3,201))s + ((-3,877)(-3,201) - (-0,1262)(21,0109m/s)))} \\
 \frac{\dot{q}(s)}{\eta(s)} &= \frac{-8,375s^2 - 26,81s}{s^2 + 7,079s + 15,06} \\
 \dot{q}(s) &= \frac{-8,375s^2 - 26,81s}{s^2 + 7,079s + 15,06} \eta(s) \\
 \dot{q}(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left( s \frac{-8,375s^2 - 26,81s}{s^2 + 7,079s + 15,06} \frac{1}{s} \right) \\
 \dot{q}(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{-8,375s^2 - 26,81s}{s^2 + 7,079s + 15,06} \right) = -8,3748 \\
 a_z(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \frac{m_\eta z_w U_e}{(s^2 - 2\zeta_s \omega_s s + \omega_s^2)} \frac{1}{s} \right) \\
 a_z(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{(-8,3748)(-3,2015)(21,0109m/s)}{(s^2 - 2(0,919)(3,851)s + (3,851)^2)} \right) = 37,9861 \\
 n_z(\infty) &= -\frac{a_z(\infty)}{g} = -\frac{37,9861}{9,81m/s^2} = -3,8722 \\
 CAP &= \frac{\dot{q}(0)}{n_z(\infty)} = \frac{-8,3748}{-3,8722} = 2,1628
 \end{aligned}$$

### 8.3.3 Análisis de cualidades de vuelo y manejo

Para el caso de estudio, el *Schweizer SGU 2-22* es una aeronave enfocada a la instrucción de vuelo, bajo los parámetros de la cuadro 8.17 y los requerimientos estandarizados desde cuadro 2.5 hasta el cuadro 2.10, podemos calificarla.

Cuadro 8.17: Datos de cualidades de vuelo y manejo.

<b>Tipo de aeronave</b>	Clase I
<b>Fase de vuelo</b>	Categoría C
<b>Amortiguamiento modo de periodo corto</b>	$\zeta_s = 0,919$
<b>Amortiguamiento modo fugoide</b>	$\zeta_p = 0,0261$
<b>CAP</b>	2.1628
<b>Tiempo modo de balanceo</b>	$T_r = 0,0911s$
<b>Tiempo modo espiral</b>	$T_s = 21,563s$
<b>Amortiguamiento modo balanceo holandés</b>	$\zeta_d = 0,2806$
	$\zeta_d \omega_d = 0,5261rad/s$
<b>Frecuencia natural modo balanceo holandés</b>	$\omega_d = 1,875rad/s$

Eje longitudinal

*Modo Nivel de cualidades de vuelo*

<b>CAP</b>	<b>Nivel 1:</b> Cualidades de vuelo adecuadas para la fase de vuelo de la misión.
	<b>Nivel 2:</b> Cualidades de vuelo adecuadas para lograr la fase de vuelo de la misión, pero con un aumento en la carga de trabajo del piloto y, o, degradación en la efectividad de la misión.
	<b>Nivel 3:</b> Cualidades de vuelo degradado, de tal manera que el avión puede ser controlado, con una efectividad inadecuada de la misión y una alta carga de trabajo para el piloto.

$CAP = 2,1628$

*Modo Nivel de cualidades de vuelo*

<b>Periodo corto</b>	<b>Nivel 1:</b> Cualidades de vuelo adecuadas para la fase de vuelo de la misión.
	<b>Nivel 2:</b> Cualidades de vuelo adecuadas para lograr la fase de vuelo de la misión, pero con un aumento en la carga de trabajo del piloto y, o, degradación en la efectividad de la misión.
	<b>Nivel 3:</b> Cualidades de vuelo degradado, de tal manera que el avión puede ser controlado, con una efectividad inadecuada de la misión y una alta carga de trabajo para el piloto.

$\zeta_s = 0,919$

*Modo Nivel de cualidades de vuelo*

<b>Fugoide</b>	<b>Nivel 2:</b> Cualidades de vuelo adecuadas para lograr la fase de vuelo de la misión, pero con un aumento en la carga de trabajo del piloto y, o, degradación en la efectividad de la misión.
	<b>Nivel 3:</b> Cualidades de vuelo degradado, de tal manera que el avión puede ser controlado, con una efectividad inadecuada de la misión y una alta carga de trabajo para el piloto.

$\zeta_p = 0,0261$

### Eje lateral-direccional

<i>Modo</i>	<i>Nivel de cualidades de vuelo</i>
<b>Balanceo</b>  $T_r = 0,0911s$	<b>Nivel 1:</b> Cualidades de vuelo adecuadas para la fase de vuelo de la misión.
	<b>Nivel 2:</b> Cualidades de vuelo adecuadas para lograr la fase de vuelo de la misión, pero con un aumento en la carga de trabajo del piloto y, o, degradación en la efectividad de la misión.
	<b>Nivel 3:</b> Cualidades de vuelo degradado, de tal manera que el avión puede ser controlado, con una efectividad inadecuada de la misión y una alta carga de trabajo para el piloto.

<i>Modo</i>	<i>Nivel de cualidades de vuelo</i>
<b>Espiral</b>  $T_s = 21,563s$	<b>Nivel 1:</b> Cualidades de vuelo adecuadas para la fase de vuelo de la misión.
	<b>Nivel 2:</b> Cualidades de vuelo adecuadas para lograr la fase de vuelo de la misión, pero con un aumento en la carga de trabajo del piloto y, o, degradación en la efectividad de la misión.
	<b>Nivel 3:</b> Cualidades de vuelo degradado, de tal manera que el avión puede ser controlado, con una efectividad inadecuada de la misión y una alta carga de trabajo para el piloto.

<i>Modo</i>	<i>Nivel de cualidades de vuelo</i>
<b>Balanceo holandés</b>  $\zeta_d = 0,2806$ $\zeta_d \omega_d = 0,5261rad/s$ $\omega_d = 1,875rad/s$	<b>Nivel 1:</b> Cualidades de vuelo adecuadas para la fase de vuelo de la misión.
	<b>Nivel 2:</b> Cualidades de vuelo adecuadas para lograr la fase de vuelo de la misión, pero con un aumento en la carga de trabajo del piloto y, o, degradación en la efectividad de la misión.
	<b>Nivel 3:</b> Cualidades de vuelo degradado, de tal manera que el avión puede ser controlado, con una efectividad inadecuada de la misión y una alta carga de trabajo para el piloto.

# Capítulo 9

## Resultados

### 9.1 Condición total de equilibrio longitudinal

$V_0$	$M_0$	$\eta_e$	$C_L$	$C_D$	$C_m$	$L/D$
15.1994	0.044	8.96	0.510	0.019	-0.014	25.8
16.1994	0.047	8.83	0.513	0.019	-0.013	25.9
17.1994	0.050	9.1	0.516	0.019	-0.013	26.1
18.1994	0.053	9.1	0.516	0.019	-0.013	26.2
19.1994	0.056	8.99	0.516	0.019	-0.013	26.3
20.1994	0.059	8.68	0.487	0.018	-0.008	26.6
21.0109	0.061	8.92	0.515	0.019	-0.013	26.5
21.1994	0.062	9.11	0.516	0.019	-0.013	26.5
22.1994	0.065	9.04	0.516	0.019	-0.013	26.6
23.1994	0.068	8.74	0.492	0.018	-0.008	26.9
24.1994	0.071	9.04	0.515	0.019	-0.013	26.8
25.1994	0.074	9.02	0.514	0.019	-0.013	26.9
26.1994	0.076	9.05	0.514	0.019	-0.013	27
27.1994	0.079	9.08	0.515	0.019	-0.013	27.1
28.1994	0.082	9.14	0.515	0.018	-0.013	27.1
29.1994	0.085	9.07	0.515	0.018	-0.013	27.2
30.1994	0.088	9.09	0.516	0.018	-0.012	27.3
31.1994	0.091	8.94	0.516	0.018	-0.012	27.3
32.1994	0.094	9.09	0.517	0.018	-0.012	27.4
33.1994	0.097	9.1	0.519	0.018	-0.012	27.4
34.1994	0.100	9.1	0.521	0.018	-0.012	27.5
35.1994	0.103	9.11	0.518	0.018	-0.012	27.6
36.1994	0.106	9.12	0.516	0.018	-0.013	27.6
37.1994	0.109	9.14	0.517	0.018	-0.012	27.7
38.1994	0.112	9.16	0.518	0.018	-0.012	27.7
39.1994	0.115	9.20	0.517	0.018	-0.013	27.8
40.2336	0.118	8.88	0.491	0.017	-0.007	28.1

## 9.2 Respuestas en controles aerodinámicos

### 9.2.1 Respuestas por variables de perturbación

Cuadro 9.1: Respuestas iniciales en controles aerodinámicos.

<i><b>Perturbaciones debido al elevador</b></i>		
$u(t)$	0.0 m/s	Velocidad axial.
$w(t)$	0.0 m/s	Velocidad normal.
$\theta(t)$	0.0 °	Ángulo de cabeceo
$q(t)$	0.0 °/s	Tasa de cabeceo
<i><b>Perturbaciones debido al alerón</b></i>		
$v(t)$	0.0 m/s	Velocidad lateral.
$\phi(t)$	0.0 °	Ángulo de balanceo.
$p(t)$	0.0 °/s	Tasa de balanceo.
$r(t)$	0.0 °/s	Tasa de guiñada.
<i><b>Perturbaciones debido al rudder</b></i>		
$v(t)$	0.0 m/s	Velocidad lateral.
$\phi(t)$	0.0 °	Ángulo de balanceo.
$p(t)$	0.0 °/s	Tasa de balanceo.
$\psi(t)$	0.0 °	Ángulo de guiñada.
$r(t)$	0.0 °/s	Tasa de guiñada.

Fuente: Autores.

Cuadro 9.2: Respuestas finales en controles aerodinámicos.

<i><b>Perturbaciones debido al elevador</b></i>		
$u(t)$	148.3467 m/s	Velocidad axial.
$w(t)$	-27.9841 m/s	Velocidad normal.
$\theta(t)$	-1.1324 °	Ángulo de cabeceo
$q(t)$	0.0 °/s	Tasa de cabeceo
<i><b>Perturbaciones debido al alerón</b></i>		
$v(t)$	57.3086 m/s	Velocidad lateral.
$\phi(t)$	24.5638 °	Ángulo de balanceo.
$p(t)$	0.0 °/s	Tasa de balanceo.
$r(t)$	11.4205 °/s	Tasa de guiñada.
<i><b>Perturbaciones debido al rudder</b></i>		
$v(t)$	20.3318 m/s	Velocidad lateral.
$\phi(t)$	2.9767 °	Ángulo de balanceo.
$p(t)$	0.0 °/s	Tasa de balanceo.
$\psi(t)$	0.0 °	Ángulo de guiñada.
$r(t)$	1.3852 °/s	Tasa de guiñada.

Fuente: Autores.

**Velocidad axial debido al elevador**

$$\frac{N_{\eta}^u(s)}{\Delta(s)} = \frac{-0,1224s^3 - 1,807s^2 + 32,38s + 256,8}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} m/s$$

Figura 9.1: Respuesta de velocidad axial debido al elevador.

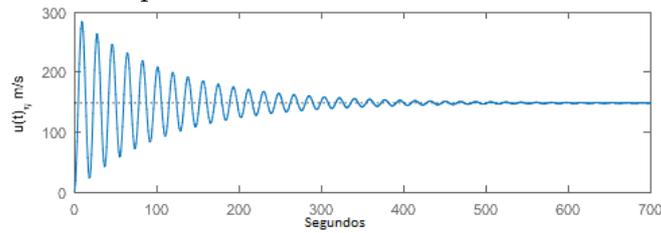


Figura 9.2: Impulso velocidad axial debido al elevador.

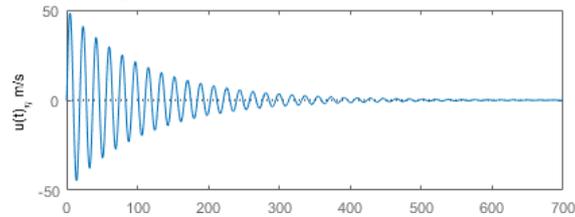
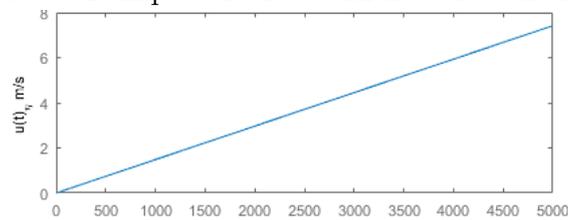


Figura 9.3: Rampa velocidad axial debido al elevador.



**Velocidad normal debido al elevador**

$$\frac{N_{\eta}^w(s)}{\Delta(s)} = \frac{-5,036s^3 - 176s^2 - 3,788s - 48,44}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} m/s$$

Figura 9.4: Respuesta de velocidad normal debido al elevador.

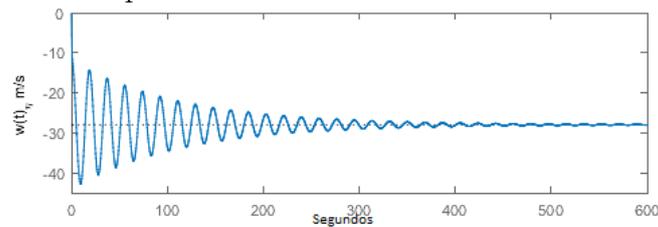


Figura 9.5: Impulso velocidad normal debido al elevador.

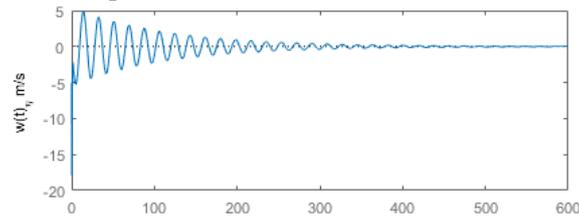
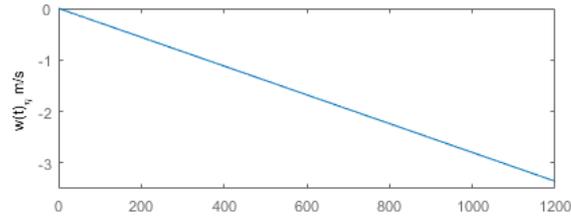


Figura 9.6: Rampa velocidad normal debido al elevador.



### Ángulo de cabeceo debido al elevador

$$\frac{N_{\eta}^{\theta}(s)}{\Delta(s)} = \frac{-8,375s^2 - 26,36s - 1,96}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} \circ$$

Figura 9.7: Respuesta de ángulo de cabeceo debido al elevador.

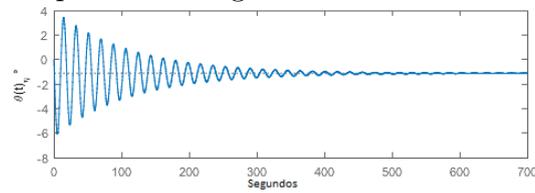


Figura 9.8: Impulso ángulo de cabeceo debido al elevador.

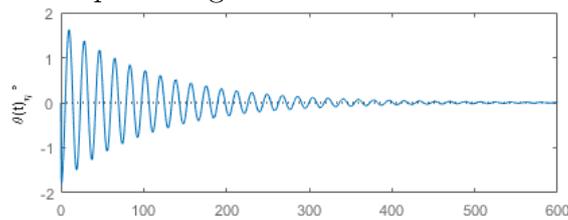
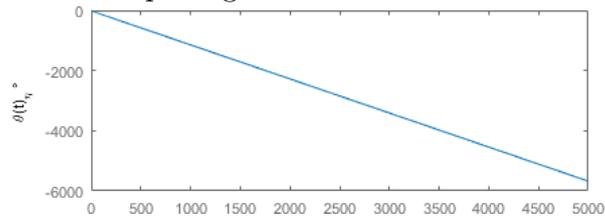


Figura 9.9: Rampa ángulo de cabeceo debido al elevador.



Tasa de cabeceo debido al elevador

$$\frac{N_{\eta}^q(s)}{\Delta(s)} = \frac{-8,375s^3 - 26,36s^2 - 1,96s}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} \text{ } \circ/s$$

Figura 9.10: Respuesta de tasa de cabeceo debido al elevador.

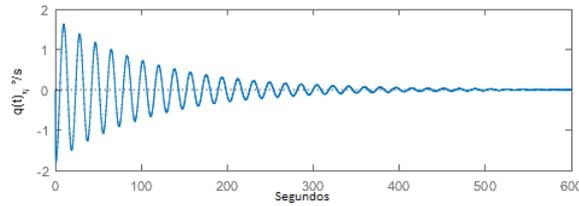


Figura 9.11: Impulso tasa de cabeceo debido al elevador.

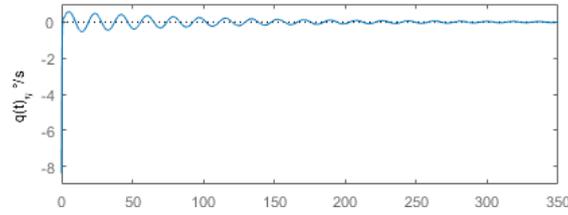
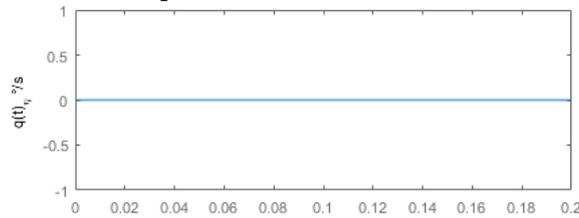


Figura 9.12: Rampa tasa de cabeceo debido al elevador.



Velocidad lateral debido al alerón

$$\frac{N_{\xi}^v(s)}{\Delta(s)} = \frac{-2,471s^3 - 279,1s^2 - 102,6s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \text{ } m/s$$

Figura 9.13: Respuesta de velocidad lateral debido al alerón.

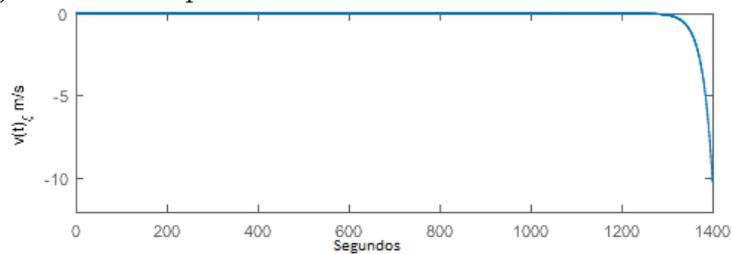
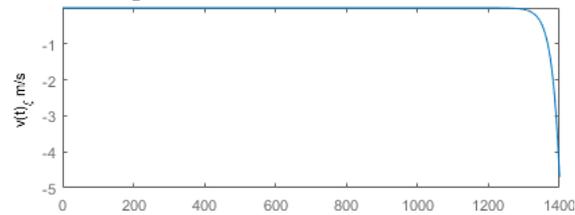


Figura 9.14: Impulso velocidad lateral debido al alerón.



### Ángulo de balanceo debido al alerón

$$\frac{N_{\xi}^{\phi}(s)}{\Delta(s)} = \frac{-14,44s^3 - 13,51s^2 - 43,97s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \circ$$

Figura 9.15: Respuesta de ángulo de balanceo debido al alerón.

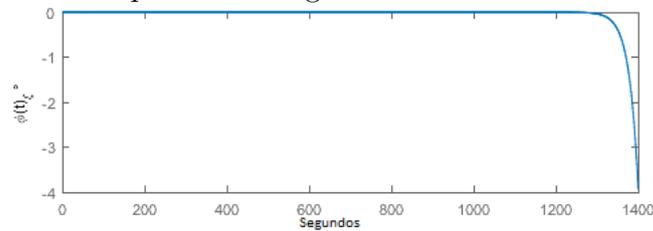
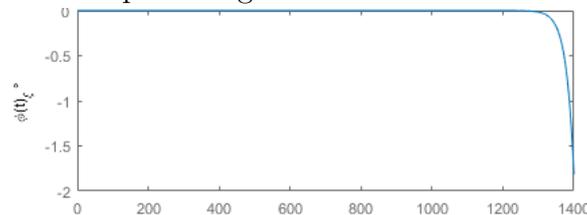


Figura 9.16: Impulso ángulo de balanceo debido al alerón.



### Tasa de balanceo debido al alerón

$$\frac{N_{\xi}^p(s)}{\Delta(s)} = \frac{-14,44s^4 - 13,51s^3 - 43,97s^2}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \circ/s$$

Figura 9.17: Respuesta de tasa de balanceo debido al alerón.

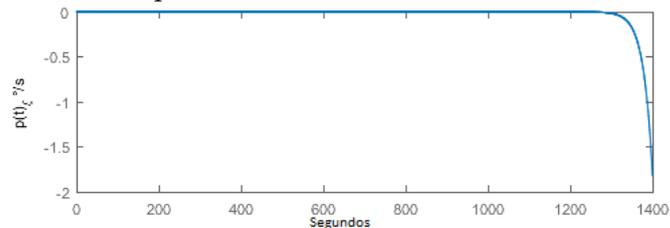
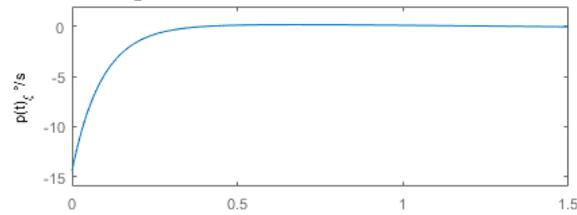


Figura 9.18: Impulso tasa de balanceo debido al alerón.



### Tasa de guiñada debido al alerón

$$\frac{N_{\xi}^r(s)}{\Delta(s)} = \frac{0,4113s^4 + 7,156s^3 + 2,328s^2 - 20,45s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \text{ } ^{\circ}/s$$

Figura 9.19: Respuesta de tasa de guiñada debido al alerón.

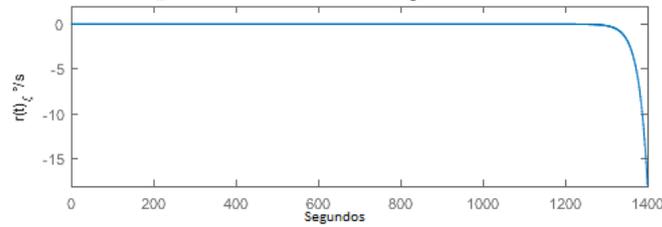
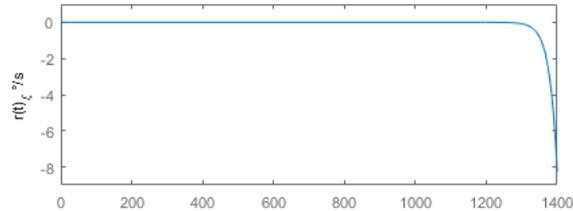


Figura 9.20: Impulso tasa de guiñada debido al alerón.



### Velocidad lateral debido al rudder

$$\frac{N_{\xi}^v(s)}{\Delta(s)} = \frac{2,856s^4 + 72,51s^3 + 473,5s^2 - 36,4s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \text{ } m/s$$

Figura 9.21: Respuesta de velocidad lateral debido al rudder.

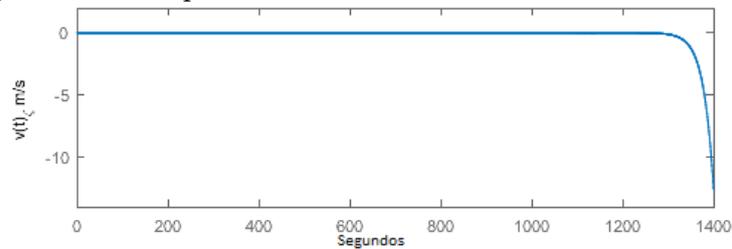
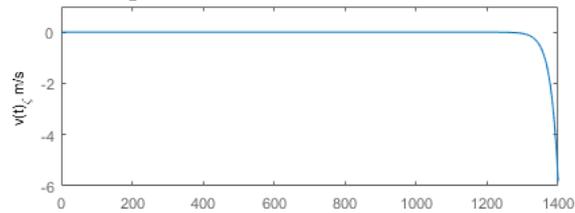


Figura 9.22: Impulso velocidad lateral debido al rudder.



### Ángulo de balanceo debido al rudder

$$\frac{N_{\zeta}^{\phi}(s)}{\Delta(s)} = \frac{1,073s^3 - 4,086s^2 - 5,329s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \circ$$

Figura 9.23: Respuesta de ángulo de balanceo debido al rudder.

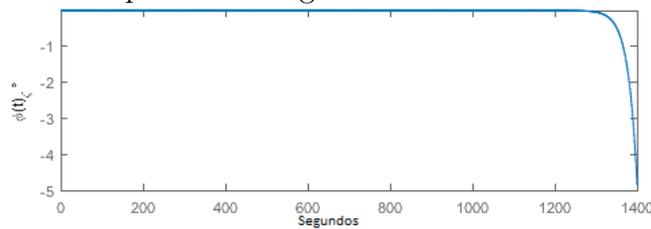
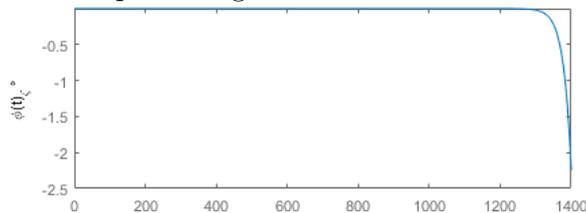


Figura 9.24: Impulso ángulo de balanceo debido al rudder.



### Tasa de balanceo debido al rudder

$$\frac{N_{\zeta}^p(s)}{\Delta(s)} = \frac{1,073s^4 - 4,086s^3 - 5,329s^2}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \circ/s$$

Figura 9.25: Respuesta de tasa de balanceo debido al rudder.

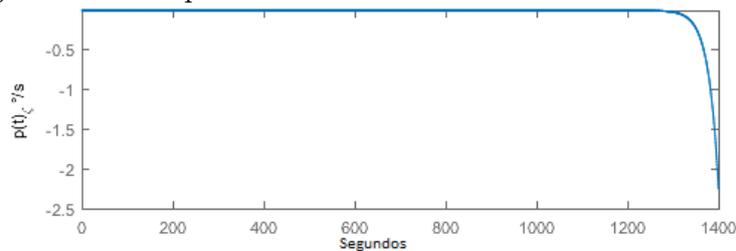
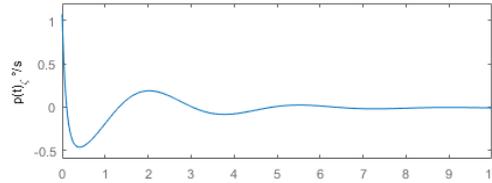


Figura 9.26: Impulso tasa de balanceo debido al rudder.



### Tasa de guiñada debido al rudder

$$\frac{N_{\zeta}^r(s)}{\Delta(s)} = \frac{-1,962s^4 - 21,72s^3 + 0,3253s^2 - 2,48s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} \text{ } ^{\circ}/s$$

Figura 9.27: Respuesta de tasa de guiñada debido al rudder.

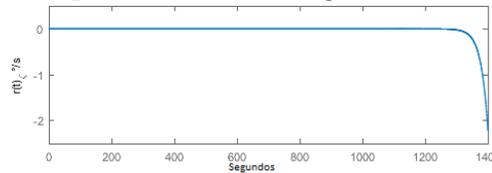
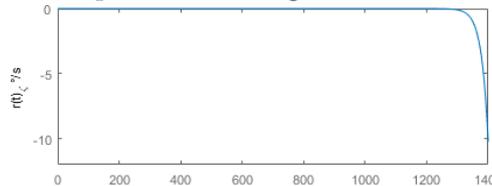


Figura 9.28: Impulso tasa de guiñada debido al rudder.



## 9.2.2 Respuestas por aceleraciones

Cuadro 9.3: Respuestas iniciales de aceleraciones.

### *Debido al elevador*

$a_x$	$-0.1224 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración axial.</b>
$a_y$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración lateral.</b>
$a_z$	$-5.0360 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración normal.</b>

### *Debido al alerón*

$a_x$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración axial.</b>
$a_y$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración normal.</b>
$a_z$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración normal.</b>

### *Debido al rudder*

$a_x$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración axial.</b>
$a_y$	$2.8559 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración lateral.</b>
$a_z$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración normal.</b>

Cuadro 9.4: Respuestas finales de aceleraciones.

<b>Debido al elevador</b>		
$a_x$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración axial.</b>
$a_y$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración lateral.</b>
$a_z$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración normal.</b>
<b>Debido al alerón</b>		
$a_x$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración axial.</b>
$a_y$	$239.9556 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración normal.</b>
$a_z$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración normal.</b>
<b>Debido al rudder</b>		
$a_x$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración axial.</b>
$a_y$	$29.1039 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración lateral.</b>
$a_z$	$0.0 \text{ m/s}^2$	<b>Aceleración normal.</b>

### Aceleración lateral debido al elevador

$$\frac{a_{y(s)}}{\eta(s)} = 0 \text{ m/s}^2$$

### Aceleración axial debido al elevador

$$\frac{a_{x(s)}}{\eta(s)} = \frac{-0,1224s^4 - 1,807s^3 + 32,38s^2 + 256,8s}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} \text{ m/s}^2$$

Figura 9.29: Respuesta de aceleración axial debido al elevador.

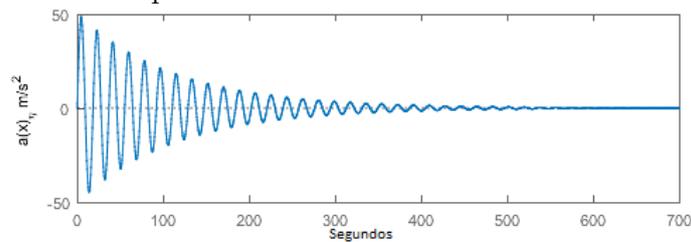
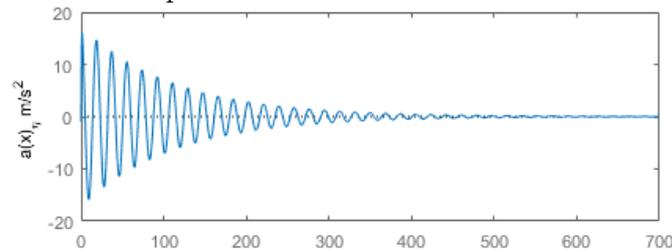


Figura 9.30: Impulso aceleración axial debido al elevador.



**Aceleración normal debido al elevador**

$$\frac{a_{z(s)}}{\eta(s)} = \frac{-5,036s^4 - 0,03622s^3 + 550s^2 - 7,255s}{s^4 + 7,1s^3 + 15,08s^2 + 1,091s + 1,731} m/s^2$$

Figura 9.31: Respuesta de aceleración normal debido al elevador.

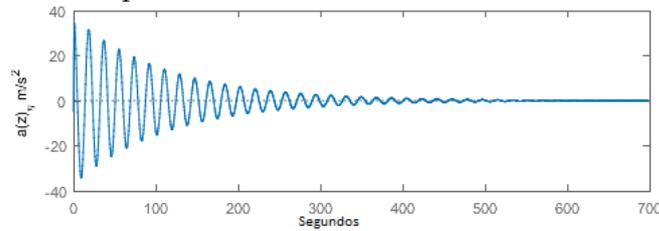
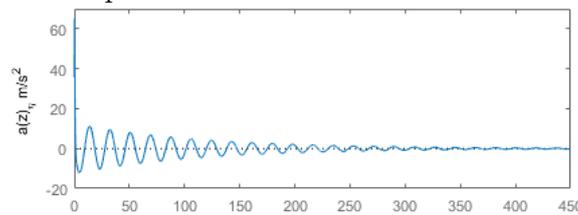


Figura 9.32: Impulso aceleración normal debido al elevador.



**Aceleración axial debido al alerón**

$$\frac{a_{x(s)}}{\xi(s)} = 0 m/s^2$$

**Aceleración lateral debido al alerón**

$$\frac{a_{y(s)}}{\xi(s)} = \frac{6,17s^4 - 128,8s^3 - 53,68s^2 - 429,6s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} m/s^2$$

Figura 9.33: Respuesta de aceleración lateral debido al alerón.

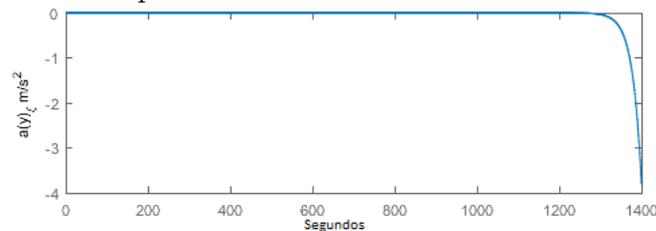
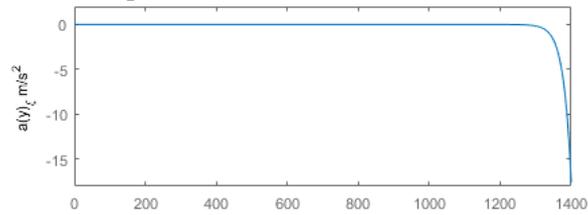


Figura 9.34: Impulso aceleración lateral debido al alerón.



**Aceleración normal debido al alerón**

$$\frac{a_{z(s)}}{\zeta(s)} = 0m/s^2$$

**Aceleración axial debido al rudder**

$$\frac{a_{x(s)}}{\zeta(s)} = 0m/s^2$$

**Aceleración lateral debido al rudder**

$$\frac{a_{y(s)}}{\zeta(s)} = \frac{2,856s^5 + 31,28s^4 + 17,14s^3 - 29,56s^2 - 52,1s}{s^5 + 11,98s^4 + 14,51s^3 + 37,9s^2 - 1,79s} m/s^2$$

Figura 9.35: Respuesta de aceleración lateral debido al rudder.

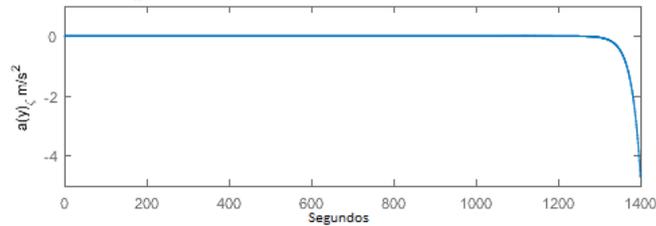
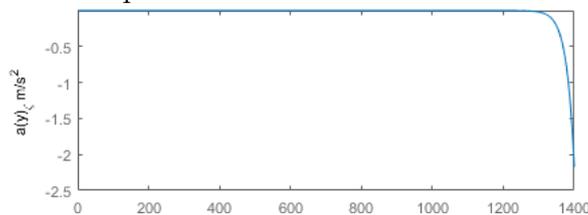


Figura 9.36: Impulso aceleración lateral debido al rudder.



**Aceleración normal debido al rudder**

$$\frac{a_{z(s)}}{\zeta(s)} = 0m/s^2$$

### 9.3 Respuestas de estabilidad estática y dinámica

#### 9.3.1 Respuesta de estabilidad dinámica

Cuadro 9.5: Respuestas de estabilidad dinámica elevador.

Modo	$u$	$w$	$q$	$\theta$
	$k_u = -0,1224$	$k_w = -5,036$	$k_q = -8,375$	$k_\theta = -8,375$
	$T_u = 0,0703s$	$T_\alpha = 0,0286s$	$T_{\theta_1} = 13,123s$	$T_{\theta_2} = 13,123s$
	$\zeta_u = 1,192$	$\zeta_\alpha = 0,013$	$T_{\theta_2} = 0,325s$	$T_{\theta_2} = 0,325s$
	$\omega_u = 12,147rad/s$	$\omega_\alpha = 0,524rad/s$		
Phugoid			$\zeta_p = 0,0261$	
			$\omega_p = 0,341rad/s$	
Short period			$\zeta_s = 0,919$	
			$\omega_s = 3,851rad/s$	

#### Velocidad axial debido al elevador

Figura 9.37: Diagrama de Bode velocidad axial debido al elevador.

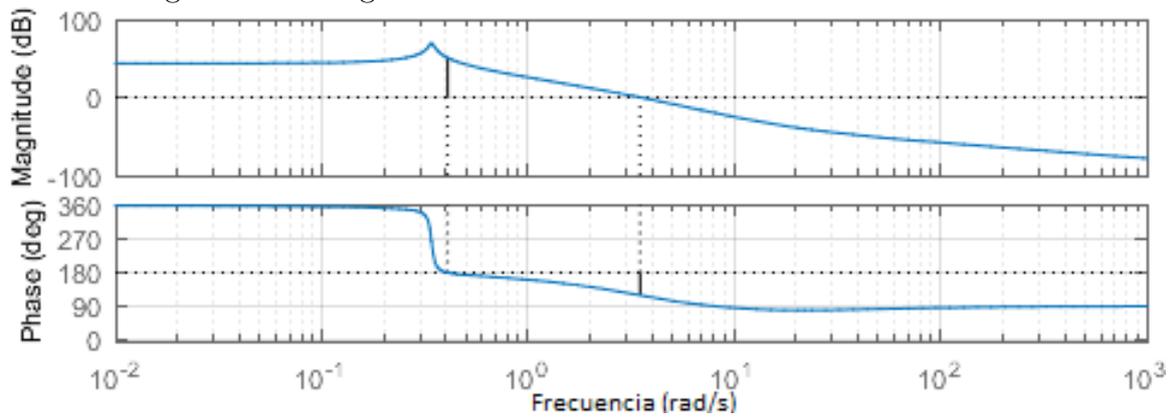
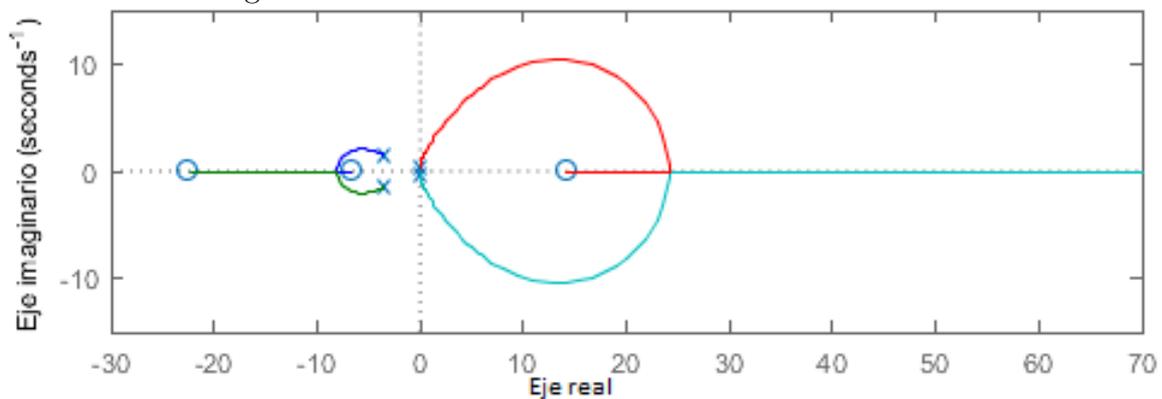


Figura 9.38: Raíces velocidad axial debido al elevador.



### Velocidad normal debido al elevador

Figura 9.39: Diagrama de Bode velocidad normal debido al elevador.

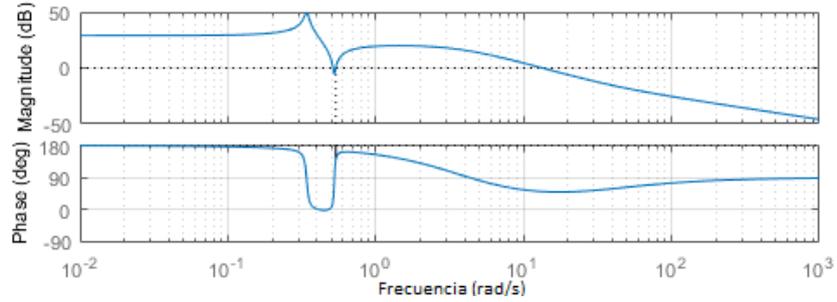
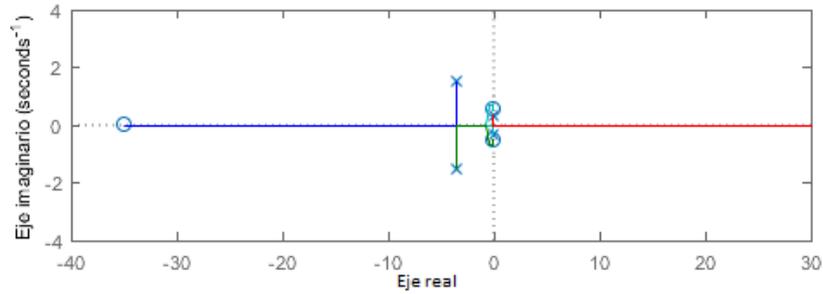


Figura 9.40: Raíces velocidad normal debido al elevador.



### Tasa de cabeceo debido al elevador

Figura 9.41: Diagrama de Bode tasa de cabeceo debido al elevador.

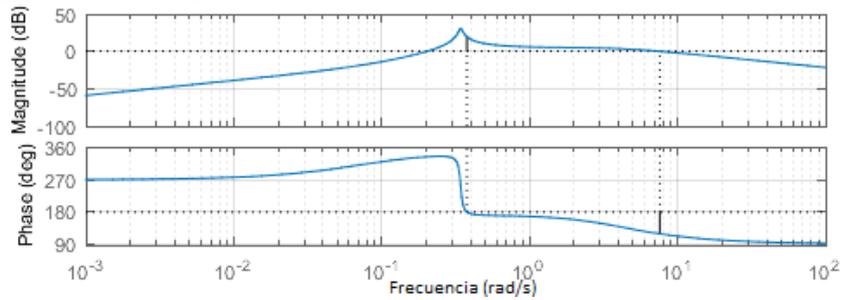
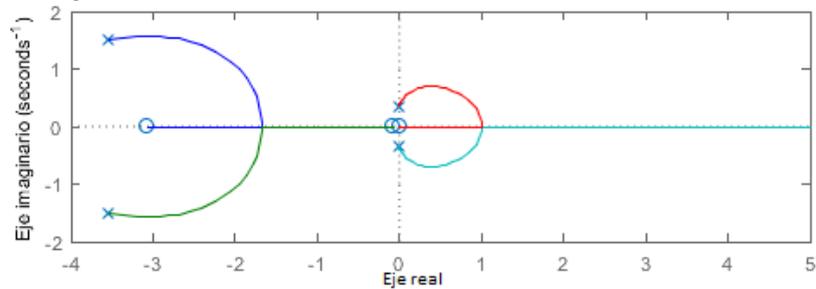


Figura 9.42: Raíces tasa de cabeceo debido al elevador.



Ángulo de cabeceo debido al elevador

Figura 9.43: Diagrama de Bode ángulo de cabeceo debido al elevador.

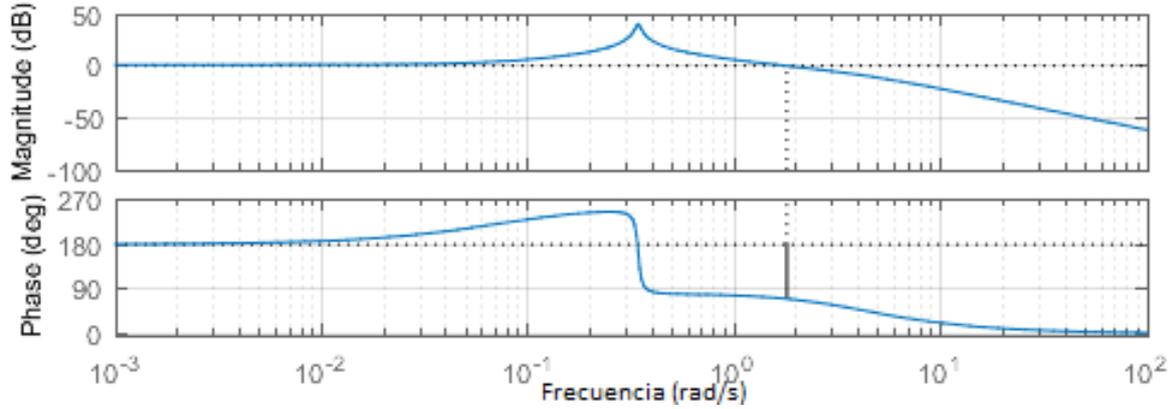
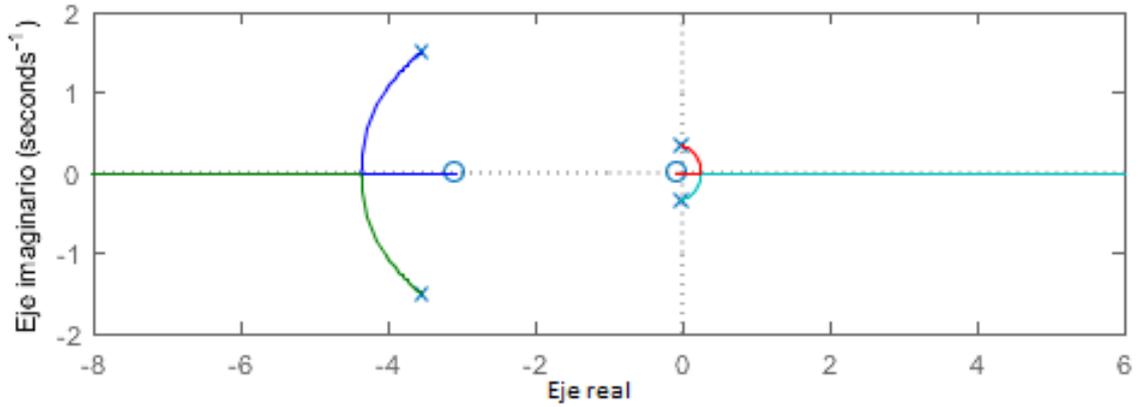


Figura 9.44: Raíces ángulo de cabeceo debido al elevador.



Cuadro 9.6: Respuestas de estabilidad dinámica alerón.

Modo	$v$	$p$	$r$	$\phi$
	$k_v = -2,471$	$k_p = -14,44$	$k_r = 0,4113$	$k_\phi = -14,44$
	$T_{\beta_1} = 2,711s$	$\zeta_\phi = 0,268$	$T_\psi = 0,675s$	$\zeta_\phi = 0,268$
	$T_{\beta_2} = 0,00888s$	$\omega_\phi = 1,744rad/s$	$\zeta_\psi = 1,628$	$\omega_\phi = 1,744rad/s$
			$\omega_\psi = 5,796rad/s$	
Dutch roll			$\zeta_d = 0,2806$	
Roll			$\omega_d = 1,875rad/s$	
Spiral			$T_r = 0,0911s$	
			$T_s = 21,563s$	

### Velocidad lateral debido al alerón

Figura 9.45: Diagrama de Bode velocidad lateral debido al alerón.

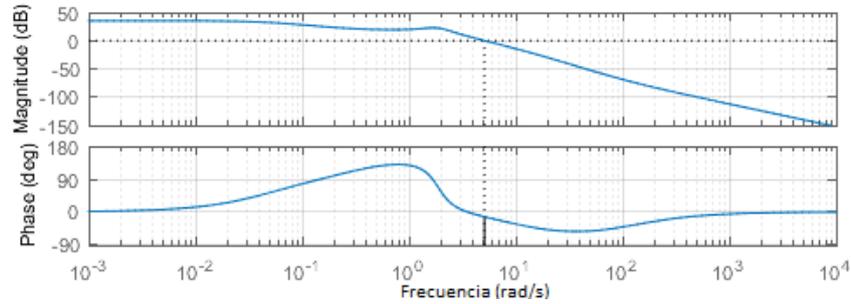
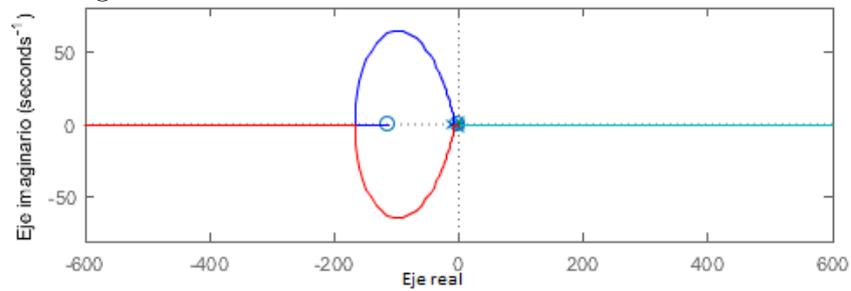


Figura 9.46: Raíces velocidad lateral debido al alerón.



### Tasa de balanceo debido al alerón

Figura 9.47: Diagrama de Bode tasa de balanceo debido al alerón.

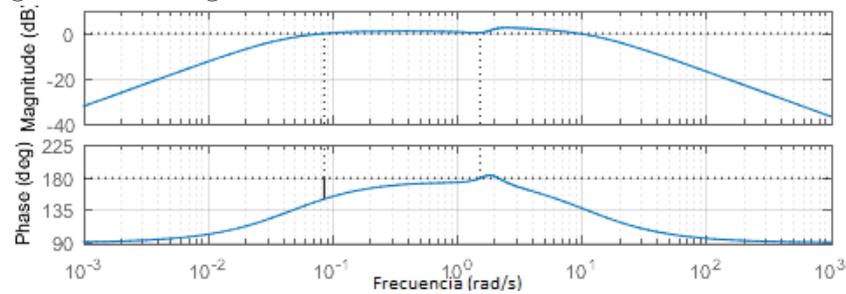
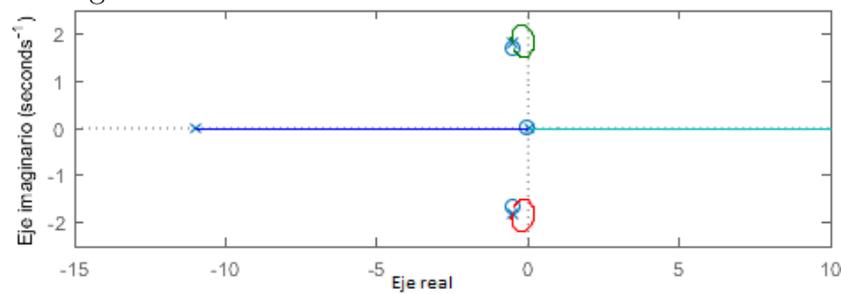


Figura 9.48: Raíces tasa de balanceo debido al alerón.



### Tasa de guiñada debido al alerón

Figura 9.49: Diagrama de Bode tasa de guiñada debido al alerón.

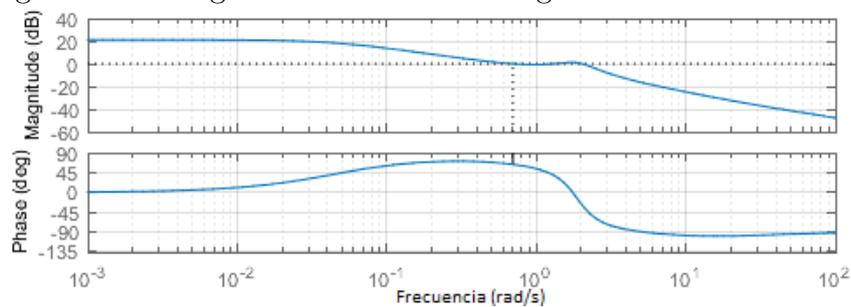
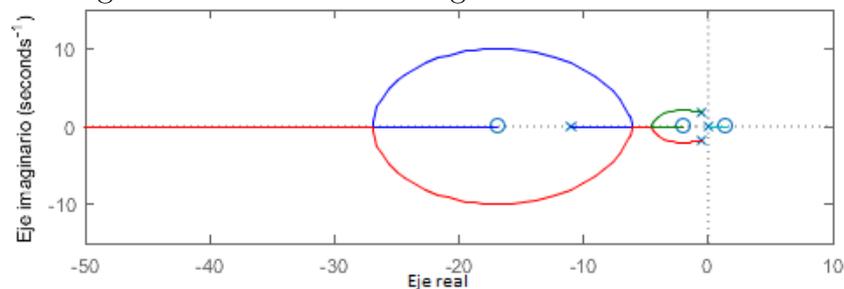


Figura 9.50: Raíces tasa de guiñada debido al alerón.



### Ángulo de balanceo debido al alerón

Figura 9.51: Diagrama de Bode ángulo de balanceo debido al alerón.

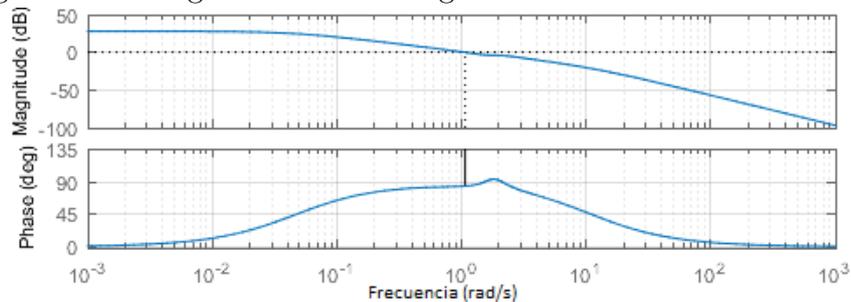
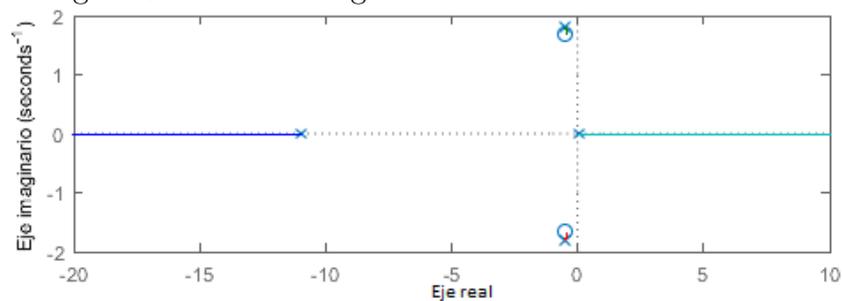


Figura 9.52: Raíces ángulo de balanceo debido al alerón.



Cuadro 9.7: Respuestas de estabilidad dinámica rudder.

Modo	$v$	$p$	$r$	$\phi$
	$k_v = -2,471$	$k_p = 1,073$	$k_r = -1,962$	$k_\phi = 1,073$
	$T_{\beta_1} = 13,16s$	$T_{\phi_1} = 0,206s$	$T_\psi = 0,0901s$	$T_{\phi_1} = 0,206s$
	$\zeta_v = 0,983$	$T_{\phi_2} = 0,973s$	$\zeta_\psi = 0,0373$	$T_{\phi_2} = 0,973s$
	$\omega_v = 12,95rad/s$		$\omega_\psi = 0,337rad/s$	
Dutch roll			$\zeta_d = 0,2806$	
			$\omega_d = 1,875rad/s$	
Roll			$T_r = 0,0911s$	
Spiral			$T_s = 21,563s$	

### Velocidad lateral debido al rudder

Figura 9.53: Diagrama de Bode velocidad lateral debido al rudder.

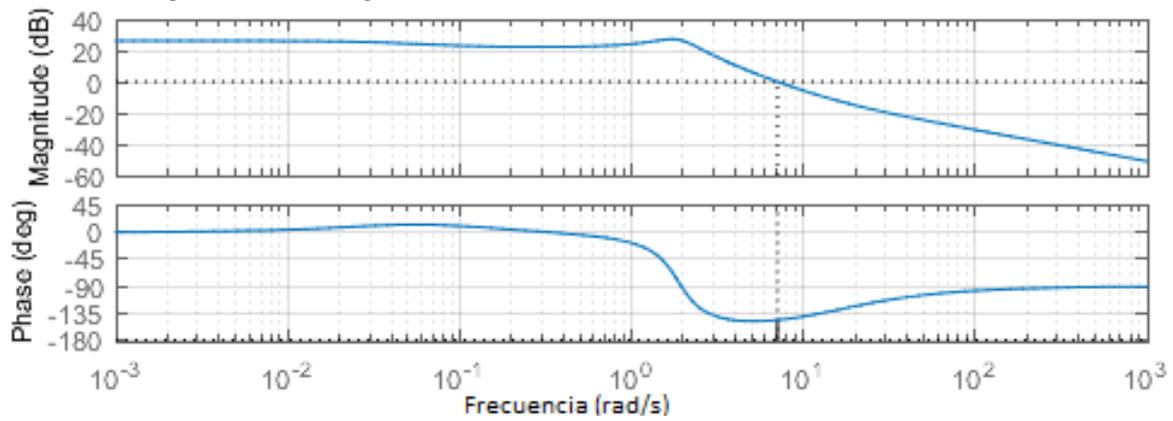
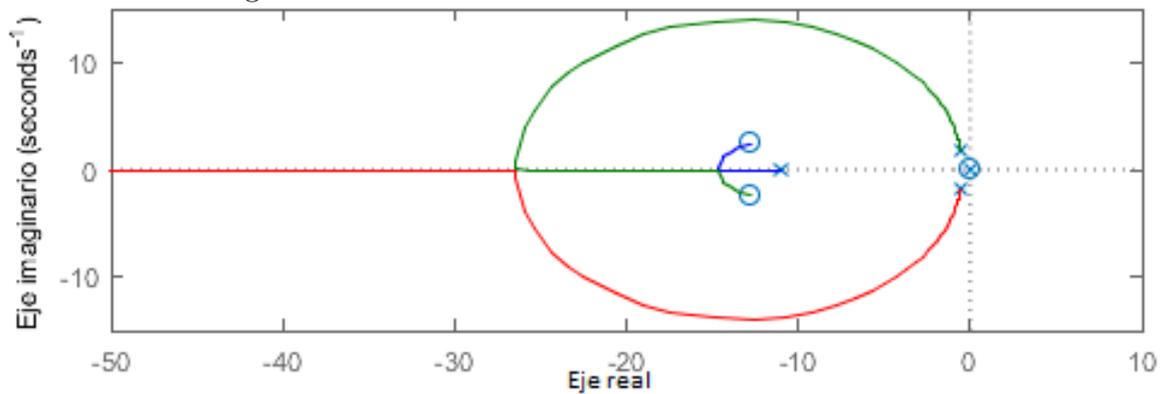


Figura 9.54: Raíces velocidad lateral debido al rudder.



### Tasa de balanceo debido al rudder

Figura 9.55: Diagrama de Bode tasa de balanceo debido al rudder.

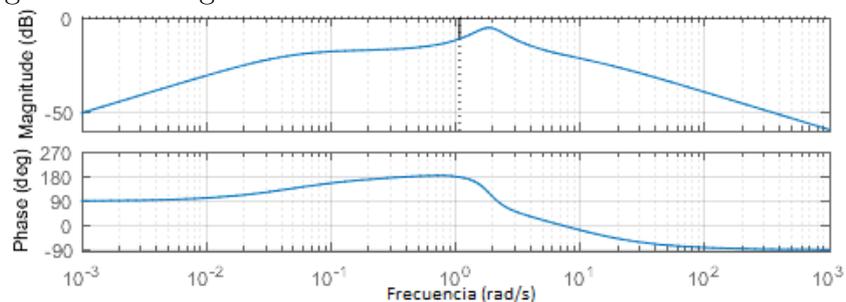
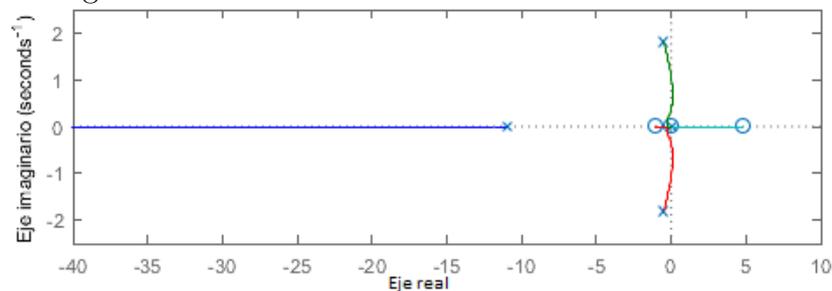


Figura 9.56: Raíces tasa de balanceo debido al rudder.



### Tasa de guiñada debido al rudder

Figura 9.57: Diagrama de Bode tasa de guiñada debido al rudder.

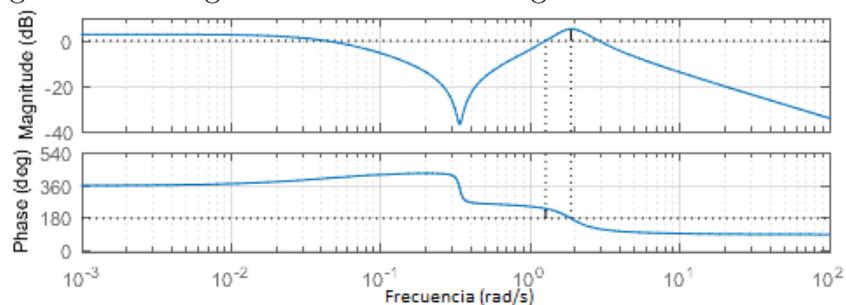
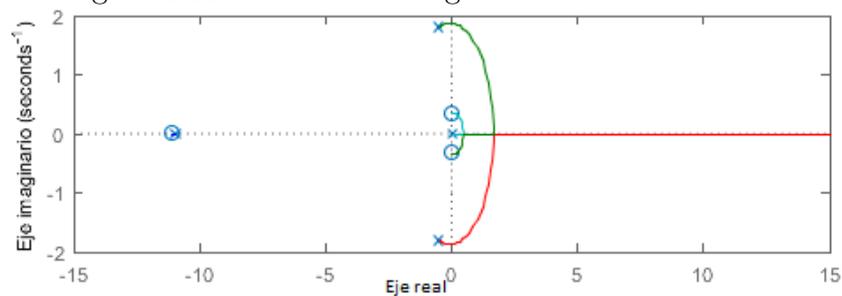


Figura 9.58: Raíces tasa de guiñada debido al rudder.



### 9.3.2 Respuesta de estabilidad estática

Cuadro 9.8: Respuesta de estabilidad estática longitudinal.

$V_0$	$M_0$	$K_n$	$h_n$
15.1994	0.044	0.1930	0.4489
16.1994	0.047	0.1880	0.4440
17.1994	0.050	0.1914	0.4473
18.1994	0.053	0.1917	0.4477
19.1994	0.056	0.1890	0.4450
20.1994	0.059	0.1913	0.4473
21.0109	0.061	0.1880	0.4440
21.1994	0.062	0.1919	0.4479
22.1994	0.065	0.1900	0.4460
23.1994	0.068	0.1888	0.4447
24.1994	0.071	0.1910	0.4469
25.1994	0.074	0.1909	0.4469
26.1994	0.076	0.1917	0.4476
27.1994	0.079	0.1916	0.4476
28.1994	0.082	0.1934	0.4494
29.1994	0.085	0.1917	0.4476
30.1994	0.088	0.1913	0.4473
31.1994	0.091	0.1883	0.4442
32.1994	0.094	0.1902	0.4461
33.1994	0.097	0.1889	0.4448
34.1994	0.100	0.1875	0.4434
35.1994	0.103	0.1904	0.4464
36.1994	0.106	0.1917	0.4477
37.1994	0.109	0.1915	0.4475
38.1994	0.112	0.1914	0.4474
39.1994	0.115	0.1928	0.4487
40.2336	0.118	0.1926	0.4486

# Capítulo 10

## Análisis de resultados

- Partiendo desde el cumplimiento de las condiciones de equilibrio, la configuración aerodinámica y geométrica determinan el aumento o disminución de los valores de coeficientes aerodinámicos condicionando el valor de  $\eta_e$ . En maniobras negativas el ángulo del elevador está máximo entre  $-2,20 < \eta_e < -2,74$  aproximadamente; y en maniobras positivas está máximo entre  $20,14 < \eta_e < 20,5$ , en donde en los dos casos se encuentra entre los márgenes del elevador permitidos por el certificado tipo, 25 grados hacia arriba y 21 grados hacia abajo.
- Las derivadas de estabilidad y control aerodinámico dependerán de la condición de equilibrio. Considerando un estado inicial de vuelo recto y nivelado en la velocidad de pérdida, la cantidad numérica de las derivadas de estabilidad y control serán menores que en la velocidad máxima admisible, reflejándose en las funciones de transferencia con cantidades mayores o menores en sus valores. Bajo estas consideraciones, en la velocidad de pérdida, las funciones de transferencia tendrán menores cantidades numéricas con altas relaciones de amortiguación y respuesta de tiempo; en la velocidad máxima admisible, será diferente ese efecto, allí las funciones de transferencia tendrán cantidades numéricas más grandes con bajas relaciones de amortiguación y respuesta de tiempo. Estas condiciones se reflejan linealmente en las respuestas por variables de perturbación y aceleración, sin importar la maniobra, entre mas baja sea la velocidad de análisis, menores serán las cantidades numéricas de las respuestas por controles aerodinámicos, y de forma contraria a altas velocidades.
- Con respecto a la estabilidad, las condiciones cambiarán por los ángulos de maniobra. El desarrollo de maniobras negativas disminuye la estabilidad y el tiempo de recuperación a una condición estable. A diferencia de esto, el desarrollo de maniobras positivas aumenta la estabilidad y tiempo de recuperación a una condición estable. De manera similar, la configuración aerodinámica por ángulos de inciden-

cia, efecto diedro, ángulo de barrido y superficies de control primarias variaría las cualidades de vuelo y manejo. En cuanto a los ángulos de ataque y las superficies de control primarias, su variación generaría momentos de cabeceo longitudinales, aumentando el margen de ángulos de maniobra mientras se mantengan las condiciones de balanceo longitudinal.

### **Factores de estabilidad y su influencia**

- **Motores:** Al tratarse de una resultante de fuerza, la dirección y magnitud de la potencia influirá en la estructura y en el movimiento de la aeronave, más si dentro del análisis se tienen cuenta efectos aeroelásticos. En cualquier configuración de motores, el gasto másico de combustible se asume constante y muy lento, por lo tanto, la masa siempre será la misma en cualquier fase de vuelo. Finalmente, en la configuración de dos o más motores, una magnitud de potencia diferente por cada motor, provocaría cambios de dirección no deseados por el piloto, influyendo no solo en la actitud en vuelo, sino también en el downwash o upwash.
- **Atmósfera:** La influencia se centra en la compresibilidad y sus efectos en las maniobras llevadas a cabo por el piloto, donde un fluido viscoso o no viscoso obligaría más trabajo estructural, y por parte del piloto, más carga de trabajo físico para establecer una actitud de vuelo; dentro de los cálculos, determinará el valor del número Reynolds, Mach y potencia entregada por motores.
- **Rango de velocidad:** Su influencia está en el número Reynolds y Mach, resultando en efectos por compresibilidad. En bajos números de Mach, no hay variaciones en los cálculos siendo cero o insignificantes. En cambio, a altos números de Mach, es importante tener en cuenta como un factor de cambio en análisis aerodinámico y en los cálculos de las derivadas de estabilidad y control aerodinámico sobretodo en ángulos grandes de maniobras donde los efectos aerodinámicos serán no lineales.
- **Misión de vuelo:** La misión para la cual fue diseñada la aeronave determina la calificación de las cualidades de vuelo y manejo, y más importante las inercias, factor de carga y capacidad de maniobra en el tiempo de análisis. Su influencia está en el rendimiento de la aeronave y la facilidad de variar su momento de rotación sobre el eje longitudinal. Aunque no es preciso determinarlo, el efecto suelo afectará en aterrizajes y despegues.
- **Aerodinámica:** La aerodinámica está influenciada por la misión para la cual habrá sido diseñada la aeronave. Para aeronaves acrobáticas y pesadas, se permite niveles de estabilidad muy bajos, con ello se busca en gran parte, aprovechar esa falta de estabilidad para aumentar la capacidad de maniobra. En ese orden de ideas, factores como ángulo diedro, ángulo de flechamiento, ángulo de incidencia, tipo de perfil

y ubicación sobre el fuselaje, garantizan cumplir dichos requerimientos de diseño. Un ángulo diedro negativo permite maniobras con ángulos muy altos tendiendo a desestabilizar la aeronave, por ello, es permitido para aeronaves de combate, acrobacia y pesadas de carga y pasajeros. En cambio, un ángulo diedro positivo, permite mejores recuperaciones en maniobras de pérdida, aumentando en cualquier caso la estabilidad; estos mismos efectos se reproducen en el ángulo de flechamiento, los grandes ángulos de flechamiento serán para aeronaves enfocadas a maniobras con altos ángulos de maniobras o aeronaves muy pesadas. En configuraciones sencillas de aeronaves con misiones de vuelo simples, llega a ser cero o nulo. El ángulo de incidencia, tipo de perfil y ubicación en el fuselaje determinan el momento de cabeceo de la aeronave, y por lo tanto, son grandes influyentes en garantizar la condición de equilibrio longitudinal sobre el downwash y el upwash. Un aspecto que poco se maneja es el arrastre lateral de la aeronave, su influencia es muy difícil de calcular, pero con gran importancia en la estabilidad lateral-direccional siendo factor de recuperación de estabilidad junto con los efectos aerodinámicos del ala principal.



# Capítulo 11

## Conclusiones

- El ángulo de incidencia del ala principal y del estabilizador horizontal son los parámetros geométricos más importantes para determinar la condición total de equilibrio longitudinal. Por esta razón, se entiende que los efectos aerodinámicos y geométricos proporcionarán momentos de cabeceo igual a cero. Por lo tanto, el elevador es la superficie de control aerodinámico más importante para generar ese estado total de equilibrio, mientras que su deflexión angular se encuentre dentro de los márgenes del certificado de tipo.
- Los efectos del número de Mach con respecto al sistema de ejes de referencia permitirán ser precisos en los resultados de las derivadas de estabilidad y control aerodinámico. Así, podemos explicar de una mejor forma los efectos físicos de las perturbaciones aerodinámicas. Con los rangos de velocidad admisibles, las derivadas de estabilidad y control aerodinámico variarán para cada análisis de velocidad realizado, donde habría infinidad de resultados para cualquier condición de vuelo.
- La frecuencia natural y las tasas de relación de amortiguamiento se encuentran en los requisitos de cualidades de vuelo y manejo exigidos para aeronaves de categoría ligera. Esto nos garantiza que en cualquier maniobra aérea, se cumplirá con los requisitos de aeronavegabilidad, permitiendo un alto rango de maniobra sin disminuir las capacidades operativas del piloto durante una misión de vuelo. Por lo tanto, como aeronave enfocada a la instrucción de vuelo, puede ofrecer altas ventajas en sus cualidades, ya que su mantenimiento es relativamente simple y sus capacidades operativas son lo suficiente buenas como herramienta de instrucción. De la misma manera, este estudio se realizó sin ningún tipo de control y sistema de piloto automático que, de ser ajustado, aumentaría los márgenes de seguridad, permitiendo mejores tasas de rendimiento.
- La combinación de los efectos de la configuración aerodinámica con respecto a la configuración geométrica determinará la estabilidad estática y dinámica de cualquier

aeronave, lo que al mismo tiempo, proporcionará un estado de las cualidades de vuelo y manejo. Esto es importante para tener en cuenta a la hora de realizar cualquier modificación en estos dos aspectos desde entornos de mantenimiento e ingeniería, ó desde una fase primaria de diseño.

- Finalmente, a partir de la configuración geométrica, aerodinámica y los resultados de la estabilidad estática y dinámica para la aeronave *Schweizer SGU 2-22*, cuadro 8.17, referenciados por las estándares de cualidades de vuelo y manejo podemos concluir que cada modo de estabilidad característico se encuentra dentro de los rangos permitidos. Por lo tanto, entendemos que la aeronave brindará un rendimiento óptimo frente a cualquier maniobra aérea que el piloto quiera ejecutar dando un margen alto de rendimiento sin afectar estructuralmente la aeronave y ejerciendo las cargas de trabajo mínimas para que el piloto sea efectivo en cada fase de la misión de vuelo, donde en todos los casos cumplió con los niveles máximos y mínimos de cualidades de vuelo. Esto permite concluir que la configuración geométrica y aerodinámica cumple con los requerimientos para que el *Schweizer SGU 2-22* sea una aeronave de instrucción aérea con altos márgenes de trabajo en vuelo, sin dejar a un lado que este análisis se hace sin tener en cuenta un control electrónico de piloto automático, que en caso de implementación permitiría aumentar los niveles de cualidades de vuelo y manejo.

# Capítulo 12

## Recomendaciones

- En el orden de mantener aproximaciones de los cálculos, es oportuno modelar en software de diseño la aeronave de estudio. La razón está en la necesidad de obtener distancias y dimensiones que en un manual de mantenimiento son difíciles de encontrar. Para los cálculos aerodinámicos es recomendable interpolar las coordenadas de los perfiles logrando mejores curvaturas, mínimo de 100 puntos. De igual forma, hacer los intervalos de análisis en grados de incidencia cortos para una mejor aproximación de las pendientes de sustentación.
- Teniendo en cuenta herramientas como *MatLab*<sup>®</sup>, *Excel*<sup>®</sup>, entre otras, lo mejor es trabajar con la máxima cantidad de decimales posible, operando los ángulos en radianes, ya que los radianes hacen posible relacionar en dimensiones lineales los ángulos, y por lo tanto, facilita la interpretación de unidades.
- Las derivadas de forma *concise equations* dimensionales permiten la visualización mas simplificada tanto en valor numérico como dimensional. La importancia de hallarlas está en el cálculo del control anticipation parameter **CAP** y en la capacidad de omitir muchos pasos en la determinación de las funciones de transferencia teniendo en cuenta los procedimientos propuestos en la fuente [5].
- Para trabajos futuros está la oportunidad de realizar estudios a partir de cálculos directos en túnel de viento con prototipos a escala. Con ello, además de corroborar posibles errores, podemos tener en cuenta efectos de espesor del perfil a partir de cambios en los ángulos de incidencia, efectos de la compresibilidad del aire; y así mismo, mejorar la metodología en el desarrollo de los estudios de cualidades de vuelo y manejo a partir de la estabilidad estática y dinámica. De esta forma, permitiríamos cálculos mas complejos con ecuaciones no lineales en maniobras y aeronaves de mayores categorías, abriendo un margen de posibilidades de trabajo en las fases de vuelo y en el control electrónico.

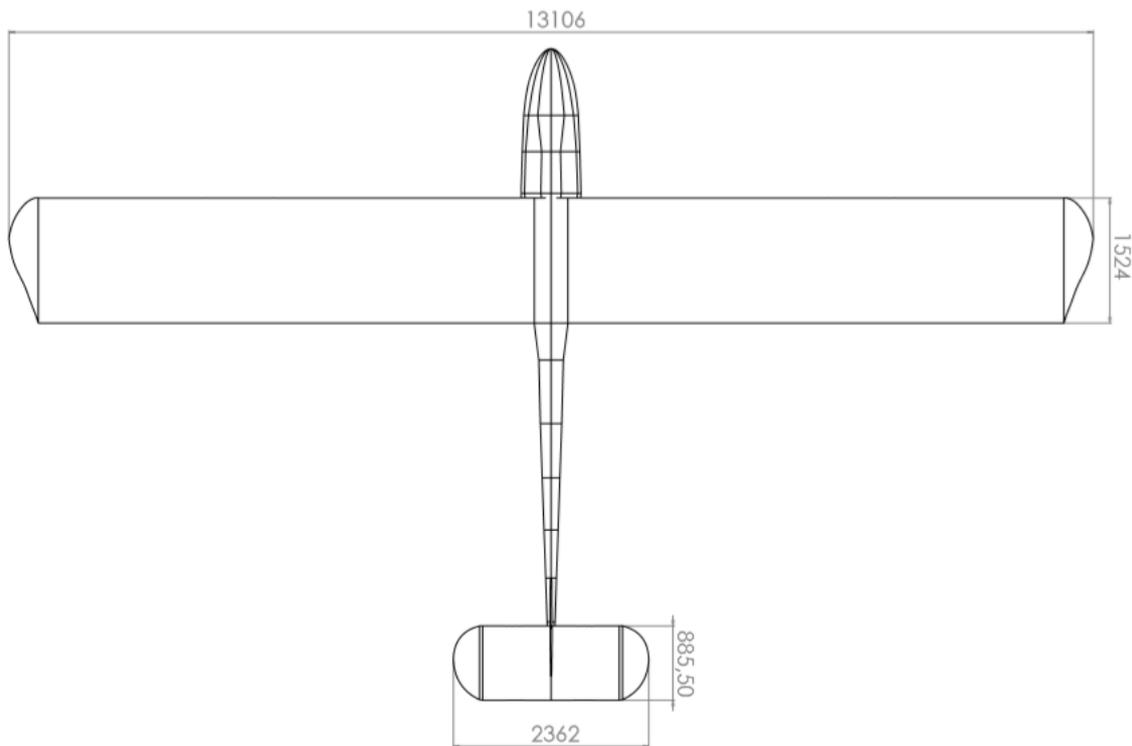


# Apéndice A

## Datos técnicos

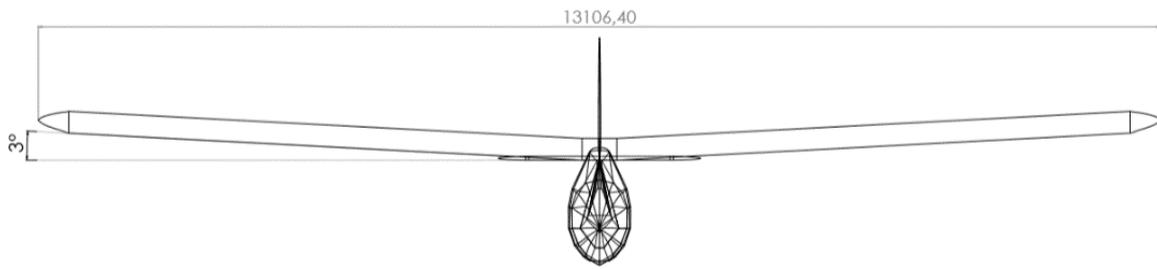
### A.1 Datos técnicos y geométricos *Schweizer SGU 2-22*.

Figura A.1: Vista superior *Schweizer SGU 2-22*.



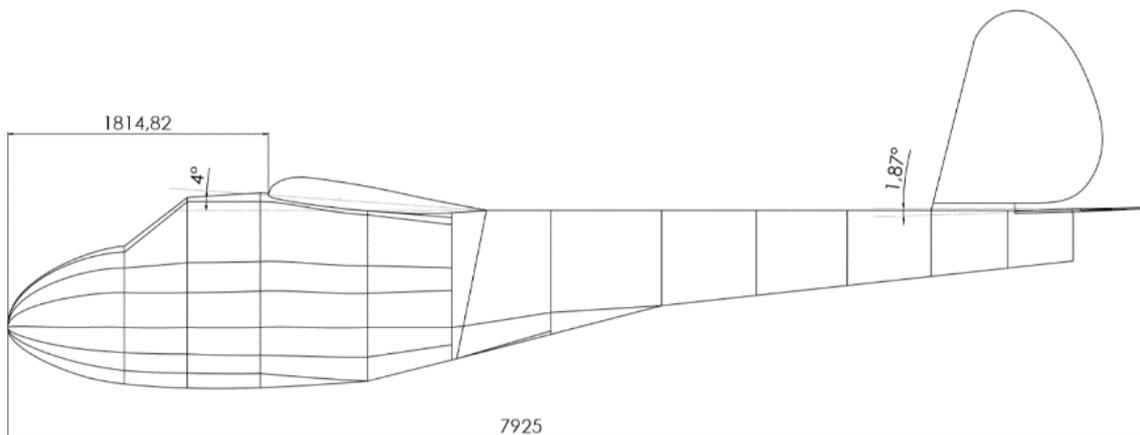
*Fuente: Autores.*

Figura A.2: Vista frontal *Schweizer SGU 2-22*.



Fuente: Autores.

Figura A.3: Vista lateral izquierda *Schweizer SGU 2-22*.



Fuente: Autores.

Cuadro A.1: Datos de rendimiento.

Máxima carga alar	20.46	$kg/m^2$
Mejor relación de planeo	21.0109	$m/s$ a 17:1
Velocidad mínima de descenso	16.54	$m/s$
Velocidad máxima	40.23	$m/s$
Velocidad de pérdida	15.19	$m/s$

Fuente: Manual de mantenimiento y Certificado Tipo

Cuadro A.2: Datos geométricos ala principal.

***Ala principal***

Altura en Z	$Z_w$	0.901	$m$	Espesor	$t/c_{max}$	0.1201
Envergadura	$b$	13.106	$m$	Taper Ratio	$\lambda_w$	1
Superficies alar	$S$	19.51	$m^2$	Aspect Ratio	$A$	8.81
Cuerda alar	$\bar{c}$	1.524	$m$	Flechamiento	$\Lambda_{1/4}$	0
Diedro	$\Gamma$	3		Incidencia	$\alpha_{w_r}$	4

Fuente: Manual de mantenimiento y Certificado Tipo

Cuadro A.3: Datos geométricos estabilizador vertical.

**Estabilizador vertical**

Tasa de volumen	$\bar{V}_F$	0.021		Distancia a <b>C.P</b>	$l_f$	4.607	<i>m</i>
Altura	$H_F$	2.217	<i>m</i>	Distancia a <b>C.G</b>	$l_F$	4.598	<i>m</i>
Envergadura	$b_F$	1.39	<i>m</i>	Cuerda alar	$\bar{c}_F$	0.93	<i>m</i>
Aspect Ratio	$AR_F$	3.23		Taper Ratio	$\lambda_F$	28.7	
Área total	$S_F$	1.21	$m^2$	Flechamiento	$\Lambda_{1/4F}$	13.74	
Área Rudder	$S_{FR}$	0.66	$m^2$	Altura <b>C.P</b>	$h_F$	1.48	<i>m</i>

Fuente: Manual de mantenimiento y Certificado Tipo

Cuadro A.4: Datos geométricos estabilizador horizontal.

**Estabilizador horizontal**

DownWash (0) AOA	$\varepsilon_0$	0.03		Espesor	$t/c_{max}$	0.09	
Envergadura	$b_T$	2.36	<i>m</i>	Cuerda	$\bar{c}_T$	0.885	<i>m</i>
Área	$S_T$	1.92	$m^2$	Taper Ratio	$\lambda_T$	1	
Distancia a <b>C.P</b>	$l_t$	5.114	<i>m</i>	Aspect Ratio	$AR_T$	2.9	
Incidencia	$\eta_T$	-1.87		Tasa de volumen	$\bar{V}_T$	0.33	
Distancia a <b>C.G</b>	$l_T$	5.105	<i>m</i>	Altura en <b>Z</b>	$Z_T$	0.819	<i>m</i>
Área fuselaje	$S_B$	6.08	$m^2$	DownWash	$d_\alpha$	0.423	
Ancho fuselaje	$F_B$	1.38	<i>m</i>				

Fuente: Manual de mantenimiento y Certificado Tipo

Cuadro A.5: Datos preliminares de estimación de peso.

Densidad aluminio espacial	$\rho_{mat}$	2711	$kg/m^3$
Factor de densidad del ala	$K_{\rho_{wing}}$	0.0011	- 0.0013
Factor de caga	$n_{ult}$	6.4588	
Factor de densidad estabilizador horizontal	$K_{\rho_{HT}}$	0.022	- 0.028
Relación elevador-estabilizador horizontal	$C_e/C_t$	0.4589	
Factor de densidad estabilizador vertical	$K_{\rho_{VT}}$	0.067	- 0.076
Relación rudder-estabilizador vertical	$C_r/C_{VT}$	0.5218	
Longitud fuselaje	$L_f$	7.4295	<i>m</i>
Factor de densidad fuselaje	$K_{\rho_f}$	0.002	- 0.003

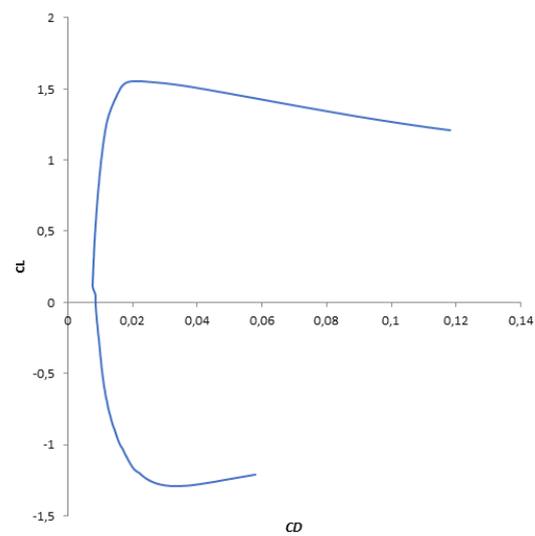
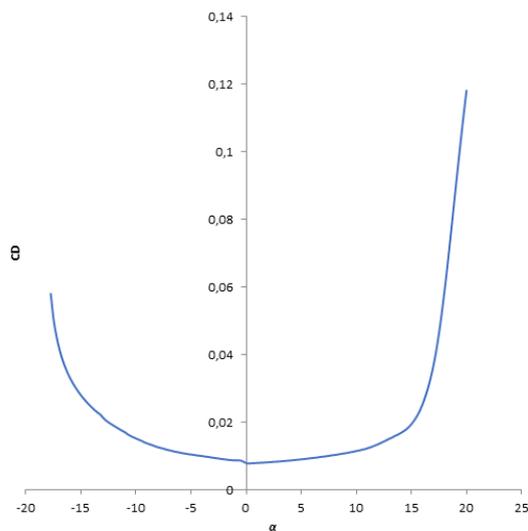
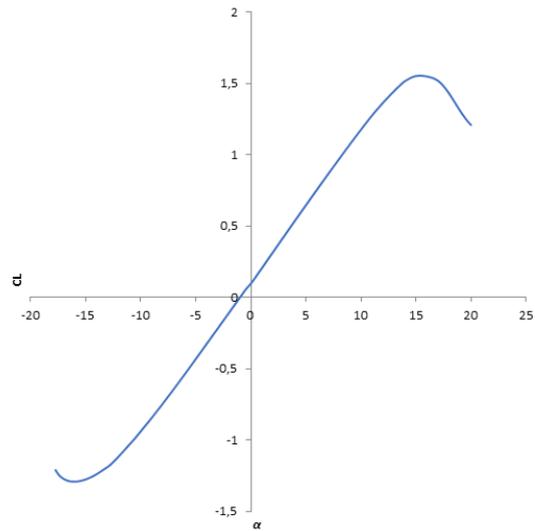
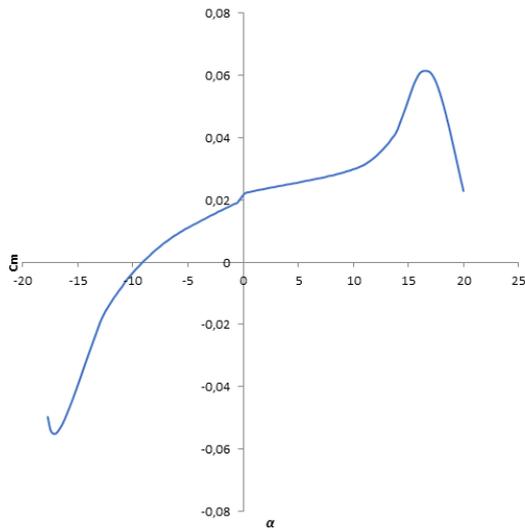
Fuente: Sadraey, M. H. (2012). Aircraft design: A systems engineering approach. John Wiley & Sons.



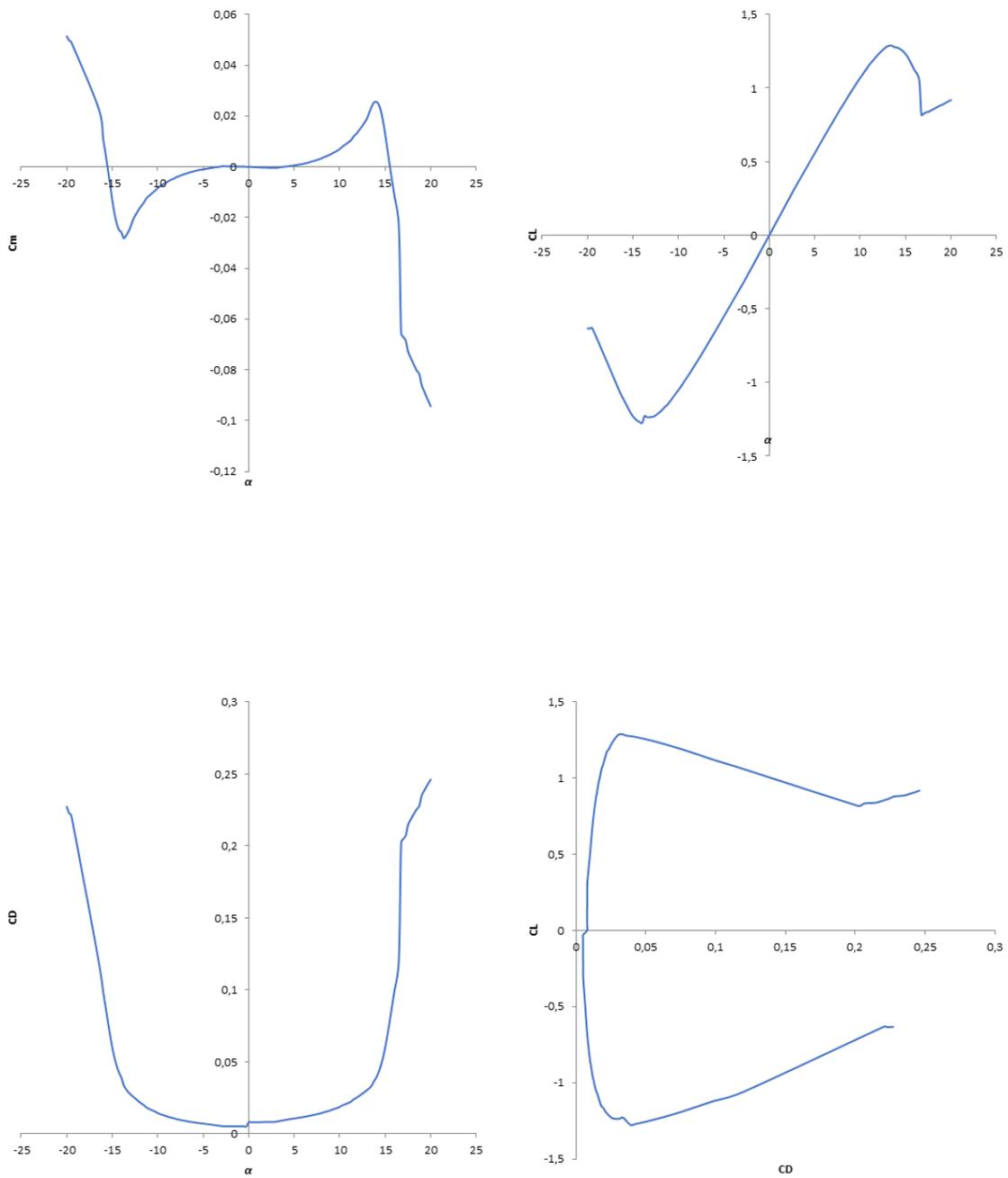
# Apéndice B

## Gráficas polares

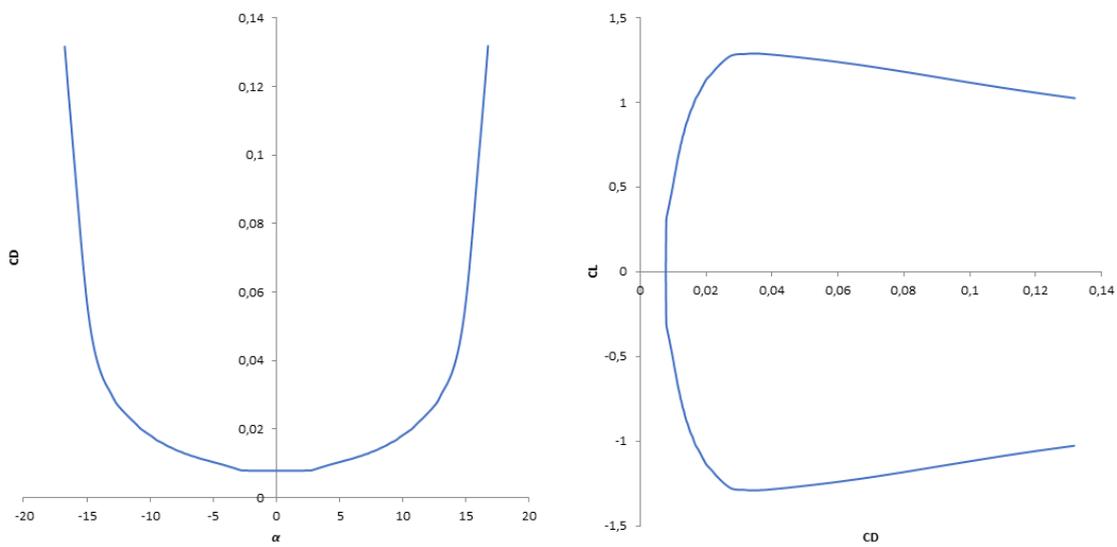
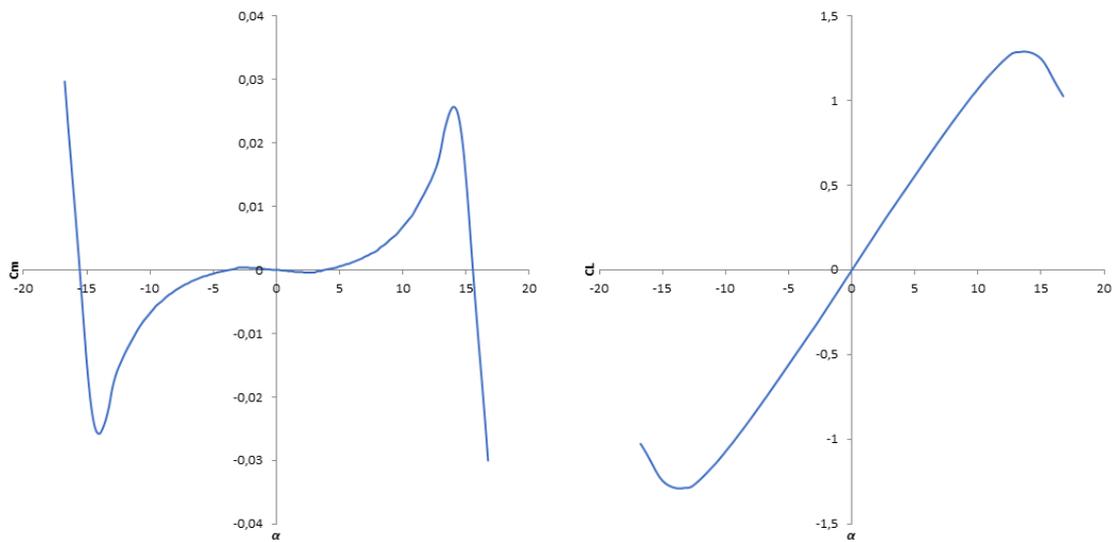
### B.1 Ala NACA 43012a



## B.2 Estabilizador horizontal NACA 0009

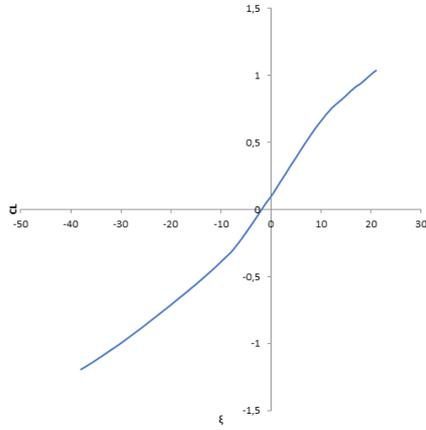


### B.3 Estabilizador vertical NACA 0009

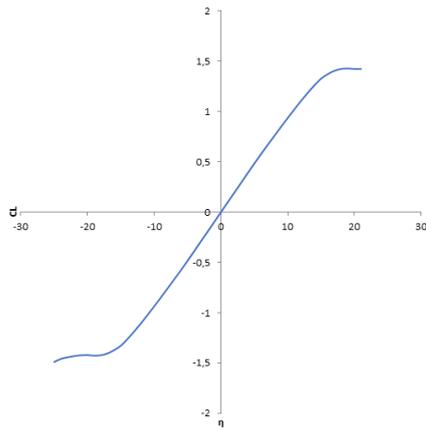


## B.4 Pendientes de sustentación

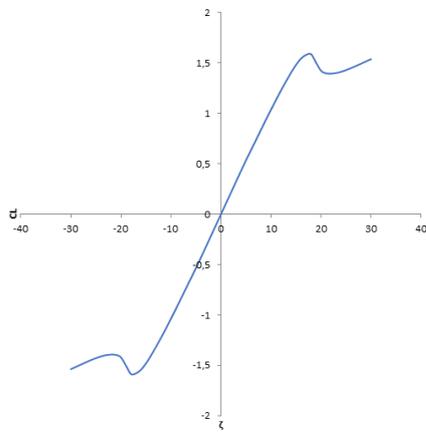
Alerón  $a_{2\xi}$



Elevador  $a_{2\eta}$



Rudder  $a_{2\zeta}$



# Apéndice C

## Condición de equilibrio

### C.1 Ecuaciones alternas

Downwash

$$x = \frac{l_t}{b}$$

$$z = \frac{z_w - z_T}{b}$$

$$d_{\varepsilon_\alpha} = \frac{a}{\pi^2 \cdot AR} \sum_{fi=0}^{75} \frac{0,5 \cos\left(\frac{fi \cdot \pi}{180}\right)^2}{\sqrt{x^2 + \left(0,5 \cos\left(\frac{fi \cdot \pi}{180}\right)\right)^2 + z^2}} \dots$$

$$\dots \left[ \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + \left(0,5 \cos\left(\frac{fi \cdot \pi}{180}\right)\right)^2 + z^2}\right)}{\left(0,5 \cos\left(\frac{fi \cdot \pi}{180}\right)\right)^2 + z^2} + \frac{x}{(x^2 + z^2)} \right] \cdot \frac{\pi}{180}$$

Fuselaje drag factor

$$S_d = 0,9998 + 0,0421 \cdot \left(\frac{F_d}{b}\right) - 2,6286 \cdot \left(\frac{F_d}{b}\right)^2 + 2,000 \cdot \left(\frac{F_d}{b}\right)^3$$

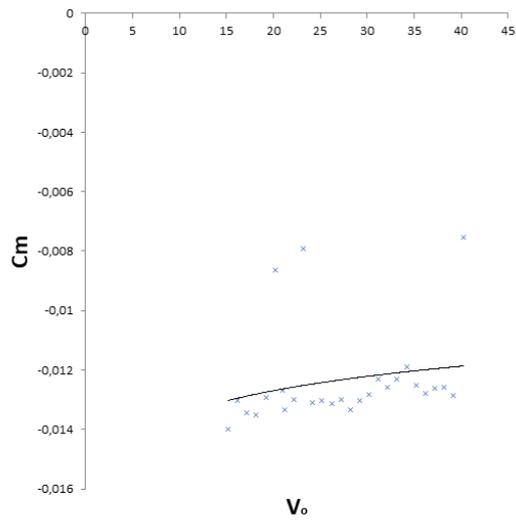
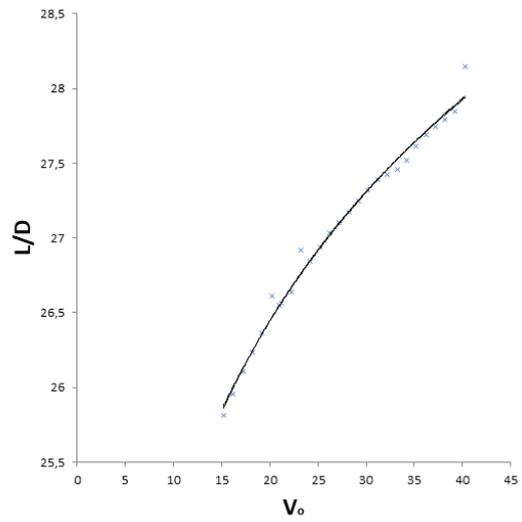
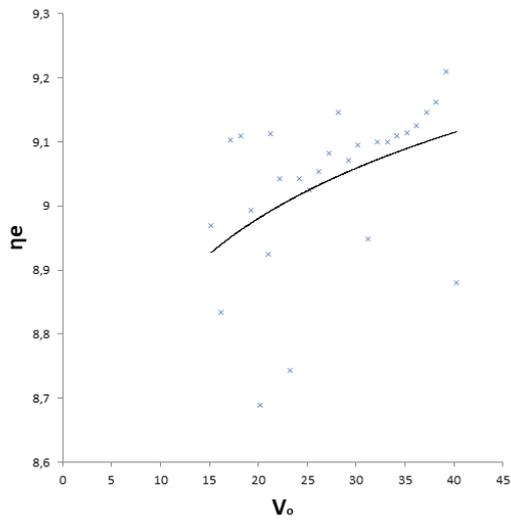
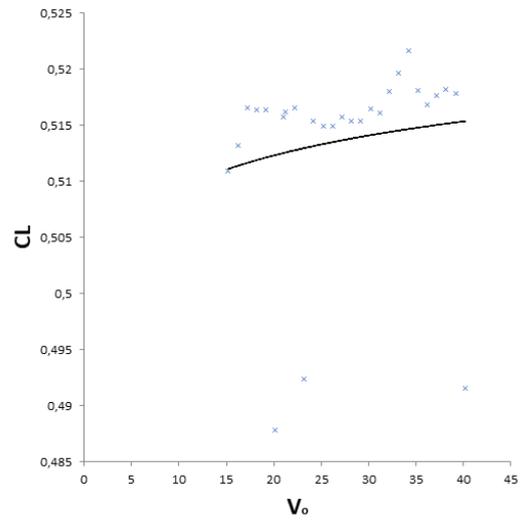
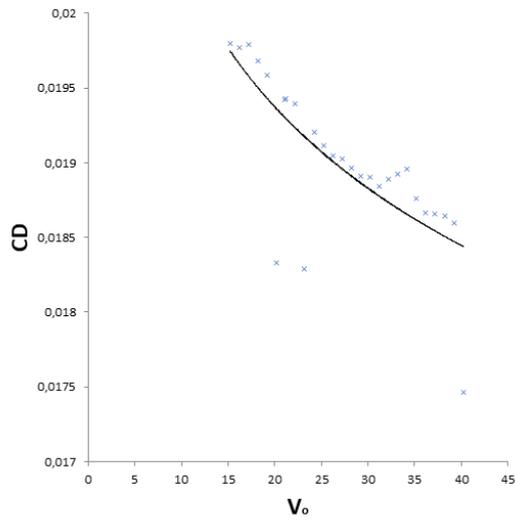
Empirical constant

$$k_D = -3,333 \cdot 10^{-4} \cdot \Lambda^2 + 6,667 \cdot 10^{-5} \cdot \Lambda + 0,38$$

Oswald efficiency factor

$$e = \frac{1}{\pi \cdot AR \cdot k_D \cdot C_{D_0} + \frac{1}{(0,99 \cdot S_d)}}$$

## C.2 Gráficas condición de equilibrio a 21.0109 m/s



# Apéndice D

## Información bibliográfica de apoyo

### D.1 Variables de movimiento en perturbación

Cuadro D.1: Variables de movimiento.

	<i>Equilibrio</i>			<i>Perturbación</i>		
<b>Ejes</b>	$0_x$	$0_y$	$0_z$	$0_x$	$0_y$	$0_z$
<b>Fuerzas</b>	0	0	0	$X$	$Y$	$Z$
<b>Momentos</b>	0	0	0	$L$	$M$	$N$
<b>Velocidad lineales</b>	$U_e$	$V_e$	$W_e$	$U$	$V$	$W$
<b>Velocidades angulares</b>	0	0	0	$p$	$q$	$r$
<b>Actitud</b>	0	$\theta_e$	0	$\phi$	$\theta$	$\psi$

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

Cuadro D.2: Fuerzas actuantes.

<b>X</b> Fuerza axial	Sumatoria de pesos y fuerza aerodinámicas.
<b>Y</b> Fuerza lateral	
<b>Z</b> Fuerza normal	

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

Cuadro D.3: Momentos actuantes.

<b>L</b> Momento de balanceo	Sumatoria de momento por pesos y momentos aerodinámicas.
<b>M</b> Momento de cabeceo	
<b>N</b> Momento de guiñada	

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

Cuadro D.4: Componentes angulares actuantes.

<b>p</b>	Momento de balanceo	Componentes de velocidades angulares
<b>q</b>	Momento de cabeceo	
<b>r</b>	Momento de guiñada	

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

Cuadro D.5: Componentes lineales actuantes.

<b>U</b>	Velocidad axial	Componentes totales de velocidades lineales a partir del centro de gravedad
<b>V</b>	Velocidad lateral	
<b>W</b>	Velocidad normal	

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

## D.2 Transformación de variables ángulos Euler

Rotamos sobre  $ox_3$ , generando  $\phi$ .

$$\begin{bmatrix} ox_3 \\ oy_3 \\ oz_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ox_2 \\ oy_2 \\ oz_2 \end{bmatrix} \quad (D.1)$$

Rotamos sobre  $oy_2$ , generando  $\theta$ .

$$\begin{bmatrix} ox_2 \\ oy_2 \\ oz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ox_1 \\ oy_1 \\ oz_1 \end{bmatrix} \quad (D.2)$$

Rotamos sobre  $oz_1$ , generando  $\psi$ .

$$\begin{bmatrix} ox_1 \\ oy_1 \\ oz_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ox_0 \\ oy_0 \\ oz_0 \end{bmatrix} \quad (D.3)$$

Sustituyendo y operando las ecuaciones D.1, D.2 y D.3 para lograr las rotaciones tipo ZYX.

$$\begin{bmatrix} ox_3 \\ oy_3 \\ oz_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ox_0 \\ oy_0 \\ oz_0 \end{bmatrix} \quad (D.4)$$

Operando la ecuación D.4.

$$\begin{bmatrix} ox_3 \\ oy_3 \\ oz_3 \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} ox_0 \\ oy_0 \\ oz_0 \end{bmatrix} \quad (D.5)$$

Donde.

$$D = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (D.6)$$

### D.3 Derivadas de estabilidad y control aerodinámico

Cuadro D.6: Derivadas de estabilidad aerodinámicas longitudinales adimensionales.

<i>Derivada</i>	<i>Expresión</i>	<i>Comentario</i>
$X_u$ Fuerza axial debido a la velocidad axial	$-2C_D - M_0 \frac{\partial C_D}{\partial M}$	Cálculo de los efectos del arrastre debido al cambio de la velocidad axial.
$Z_u$ Fuerza normal debida a la velocidad axial	$-2C_L - M_0 \frac{\partial C_L}{\partial M}$	Cálculo de los efectos de la sustentación debido al cambio en la velocidad axial.
$X_w$ Fuerza axial debido a la velocidad normal	$C_L - \frac{\partial C_D}{\partial \alpha}$	Fuerza producida debido a la incidencia. Cálculo de los efectos de la sustentación y arrastre debido al cambio del ángulo de incidencia.
$Z_w$ Fuerza normal debido a la velocidad normal	$-\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} + C_D\right)$	Fuerza producida debido a la incidencia. Cálculo de los efectos de la sustentación y arrastre debido al cambio del ángulo de incidencia.
$M_u$ Momento de cabeceo debido a la velocidad axial	$M_0 \frac{\partial C_m}{\partial M}$	Momento generado debido a la componente de velocidad axial. Cálculo de los efectos de la velocidad.
$M_w$ Momento de cabeceo debido a la velocidad normal	$-aK_n$	Momento generado por el cambio de la incidencia. Cálculo de los efectos de la rigidez para maniobras de cabeceo en el margen estático.
$X_q$ Fuerza axial debido a la tasa de cabeceo	$-\bar{V}_T \frac{\partial C_{D_T}}{\partial \alpha_T}$	Cálculo de los efectos del arrastre en el estabilizador horizontal.

$Z_q$	Fuerza normal debido a la tasa de cabeceo	$-\bar{V}_T a_1$	Cálculo de los efectos de la sustentación en el estabilizador horizontal.
$M_q$	Momento de cabeceo debido a la tasa de cabeceo	$Z_q \frac{l_T}{c}$	Cálculo de las oscilaciones de cabeceo con respecto al estabilizador horizontal.
$X_{\dot{w}}$	Fuerza axial debido a la tasa de cambio de la velocidad normal	$X_q \frac{d\varepsilon}{d\alpha}$	Fuerza producida por el incremento de downwash sobre el eje $OX$ . Cálculo de los efectos del arrastre en el estabilizador horizontal debido al downwash.
$Z_{\dot{w}}$	Fuerza normal debido a la tasa de cambio de la velocidad normal	$Z_q \frac{d\varepsilon}{d\alpha}$	Fuerza producida por el incremento de downwash sobre el eje $OX$ . Cálculo de los efectos de la sustentación en el estabilizador horizontal debido al downwash.
$M_{\dot{w}}$	Momento de cabeceo debido a la tasa de cambio de la velocidad normal	$M_q \frac{d\varepsilon}{d\alpha}$	Momento producido por el incremento de downwash sobre el eje $OX$ . Cálculo de los efectos de las oscilaciones de cabeceo en el estabilizador horizontal por incrementos de downwash

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

Cuadro D.7: Derivadas de estabilidad aerodinámicas latera-direccional adimensionales.

<b>Derivada</b>	<b>Expresión</b>	<b>Comentario</b>	
$Y_v$	Fuerza lateral debido al deslizamiento lateral	$(\frac{S_B}{S} y_B - \frac{S_F}{S} a_{1F})$	Originada por el arrastre del fuselaje y estabilizador vertical.
$L_v$	Momento de balanceo debido al deslizamiento lateral	$-\frac{1}{S_s} \int_0^s c_y a_y \Gamma y dy$ $-\bar{V}_F \frac{h_F}{l_F} a_{1F}$ $-\frac{2C_L \tan \Lambda_{1/4}}{S_s} \int_0^s c_y y dy$	Determinado por la estabilidad estática lateral de la incidencia y ubicación del ala principal en el fuselaje, con contribuciones del ángulo diedro, ángulo de flechamiento y estabilizador vertical.
$N_v$	Momento de guiñada debido al deslizamiento lateral	$\bar{V}_F a_{1F}$	Cuantifica el modo espiral en perturbaciones laterales debido a la sustentación en el ángulo diedro, ángulo de barrido y la geometría del ala-fuselaje respecto al centro de gravedad. Donde la contribución del estabilizador vertical es la más significativa.

$Y_p$	Fuerza lateral debido a la tasa de balanceo	$-\frac{1}{Sb} \int_0^{H_F} a_h c_h h dh$	Es cero, a menos que la relación de aspecto del estabilizador vertical sea alta con valores pequeños como contribución más significativa.
$L_p$	Fuerza lateral debido a la tasa de balanceo	$-\frac{(a_y + C_{Dy})}{2Ss^2} \int_0^s c_y y^2 dy$	Con contribuciones del ala-fuselaje, estabilizador vertical y horizontal, describe el modo de balanceo.
$N_p$	Momento de guiñada debido a la tasa de balanceo	$-\frac{(C_{Ly} - \frac{dC_D}{d\alpha_y})}{2Ss^2} \int_0^s c_y y^2 dy$	Con contribuciones del ala-fuselaje. Describe los efectos del arrastre en el ala principal con respecto al centro de gravedad
$Y_r$	Fuerza lateral debido a la tasa de guiñada	$\bar{V}_F a_{1F}$	Cálculo de los efectos de la sustentación en el centro de presiones del estabilizador vertical con respecto al centro de gravedad.
$L_r$	Momento de balanceo debido a la tasa de guiñada	$\frac{1}{Ss^2} \int_0^s C_{Ly} c_y y^2 dy - L_{v(fin)} \frac{l_F}{b}$	Cálculo de los efectos de la sustentación en el ala principal con respecto a la sustentación generada en el estabilizador vertical.
$N_r$	Momento de guiñada debido a la tasa de guiñada	$-\frac{1}{Ss^2} \int_0^s C_{Dy} c_y y^2 dy - N_{v(fin)} \frac{l_F}{b}$	Determina el modo de balanceo holandés. Con contribuciones del estabilizador vertical y el ala principal, calcula los efectos del arrastre en el ala principal con respecto a la sustentación generada en el estabilizador vertical.

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

Cuadro D.8: Derivadas de control aerodinámico adimensionales.

<b>Derivada</b>	<b>Expresión</b>	<b>Comentario</b>
$X_\eta$	Fuerza axial debido al elevador $-(2) \frac{S_T}{S} k_T C_{L_T} a_{2_\eta}$	Cálculo de efectos del arrastre producido en el estabilizador horizontal.
$Z_\eta$	Fuerza normal debido al elevador $-\frac{S_T}{S} a_{2_\eta}$	Cálculo de los efectos de la sustentación producida en el estabilizador horizontal.

$M_\eta$	Momento de cabeceo debido al elevador	$-\bar{V}_T a_{2\eta}$	Cálculo del momento producido por la sustentación en el estabilizador horizontal con respecto al centro de gravedad.
$Y_\xi$	Fuerza lateral debido al alerón	$Y_\xi = 0$	Para alas de altos ángulos de flechamiento es insignificamente pequeño, para alas normales es cero.
$L_\xi$	Momento de balanceo debido al alerón	$-\frac{1}{S_s} a_{2\xi} \int_{y_1}^{y_2} c_y y dy$	Describe las propiedades de sustentación en maniobras de balanceo.
$N_\xi$	Momento de guiñada debido al alerón	$\frac{1}{S_s} \int_{y_1}^{y_2} \left( \frac{\partial C_{Dy}}{\partial \xi} \right) c_y y dy$	Describe las propiedades en respuesta al arrastre con respecto a los alerones.
$Y_\zeta$	Fuerza lateral debido al rudder	$\frac{S_F}{S} a_{2\zeta}$	Cuantifica la sustentación debido al rudder, asumiendo que es la misma a lo largo de la envergadura del estabilizador vertical.
$L_\zeta$	Momento de balanceo debido al rudder	$\bar{V}_F \frac{h_F}{l_F} a_{2\zeta}$	Describe la señal física contraria a un momento de balanceo sobre el estabilizador vertical en respuesta a deflexiones del rudder.
$N_\zeta$	Momento de guiñada debido al rudder	$-\bar{V}_F a_{2\zeta}$	Describe las propiedades dinámicas y estáticas del rudder con respecto al centro de gravedad.

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

Cuadro D.9: Derivadas de estabilidad aerodinámicas longitudinales dimensionales.

<i>Adimensional</i>	<i>Multiplicador</i>	<i>Dimensional</i>
$X_u$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S$	$\dot{X}_u$
$Z_u$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S$	$\dot{Z}_u$
$X_w$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S$	$\dot{X}_w$
$Z_w$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S$	$\dot{Z}_w$
$M_u$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S \bar{c}$	$\dot{M}_u$
$M_w$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S \bar{c}$	$\dot{M}_w$
$X_q$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S \bar{c}$	$\dot{X}_q$
$Z_q$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S \bar{c}$	$\dot{Z}_q$
$M_q$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S \bar{c}^2$	$\dot{M}_q$
$X_{\dot{w}}$	$\frac{1}{2}\rho S \bar{c}$	$\dot{X}_{\dot{w}}$
$Z_{\dot{w}}$	$\frac{1}{2}\rho S \bar{c}$	$\dot{Z}_{\dot{w}}$

$M_{\dot{w}}$	$\frac{1}{2}\rho S\bar{c}^2$	$\dot{M}_{\dot{w}}$
<i>Fuente: Cook, M. V. (2012). Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control. Butterworth-Heinemann.</i>		

Cuadro D.10: Derivadas de estabilidad aerodinámicas lateral-direccional dimensionales.

<i>Adimensional</i>	<i>Multiplicador</i>	<i>Dimensional</i>
$Y_v$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S$	$\dot{Y}_v$
$L_v$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S b$	$\dot{L}_v$
$N_v$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S b$	$\dot{N}_v$
$Y_p$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S b$	$\dot{Y}_p$
$L_p$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S b^2$	$\dot{L}_p$
$N_p$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S b^2$	$\dot{N}_p$
$Y_r$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S b$	$\dot{Y}_r$
$L_r$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S b^2$	$\dot{L}_r$
$N_r$	$\frac{1}{2}\rho V_0 S b^2$	$\dot{N}_r$

*Fuente: Cook, M. V. (2012). Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control. Butterworth-Heinemann.*

Cuadro D.11: Derivadas de control aerodinámico dimensionales.

<i>Adimensional</i>	<i>Multiplicador</i>	<i>Dimensional</i>
$X_\eta$	$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S$	$\dot{X}_\eta$
$Z_\eta$	$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S$	$\dot{Z}_\eta$
$M_\eta$	$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S \bar{c}$	$\dot{M}_\eta$
$Y_\xi$	$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S$	$\dot{Y}_\xi$
$L_\xi$	$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S b$	$\dot{L}_\xi$
$N_\xi$	$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S b$	$\dot{N}_\xi$
$Y_\zeta$	$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S$	$\dot{Y}_\zeta$
$L_\zeta$	$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S b$	$\dot{L}_\zeta$
$N_\zeta$	$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S b$	$\dot{N}_\zeta$

*Fuente: Cook, M. V. (2012). Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control. Butterworth-Heinemann.*

Cuadro D.12: Derivadas de estabilidad aerodinámica longitudinales reducidas.

<i>Derivada reducida</i>	<i>Expresión matemática dimensional</i>
$x_u$	$\frac{\dot{X}_u}{m} + \frac{\dot{X}_{\dot{w}} \dot{Z}_u}{m(m - \dot{Z}_{\dot{w}})}$
$z_u$	$\frac{\dot{Z}_u}{m - \dot{Z}_{\dot{w}}}$
$m_u$	$\frac{\dot{M}_u}{I_y} + \frac{\dot{Z}_u \dot{M}_{\dot{w}}}{I_y(m - \dot{Z}_{\dot{w}})}$
$x_w$	$\frac{\dot{X}_w}{m} + \frac{\dot{X}_{\dot{w}} \dot{Z}_w}{m(m - \dot{Z}_{\dot{w}})}$
$z_w$	$\frac{\dot{Z}_w}{m - \dot{Z}_{\dot{w}}}$

$$\begin{array}{l}
 m_w \\
 x_q \\
 z_q \\
 m_q \\
 x_\theta \\
 z_\theta \\
 m_\theta
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \frac{\dot{M}_w}{I_y} + \frac{\dot{Z}_w \dot{M}_{\dot{w}}}{I_y(m - \dot{Z}_{\dot{w}})} \\
 \frac{(\dot{X}_q - mW_e)}{m} + \frac{(\dot{Z}_q + mU_e)\dot{X}_{\dot{w}}}{m(m - \dot{Z}_{\dot{w}})} \\
 \frac{(\dot{Z}_q + mU_e)}{m - \dot{Z}_{\dot{w}}} \\
 \frac{\dot{M}_q}{I_y} + \frac{(\dot{Z}_q + mU_e)\dot{M}_{\dot{w}}}{I_y(m - \dot{Z}_{\dot{w}})} \\
 -g \cos \theta_e - \frac{\dot{X}_{\dot{w}} g \sin \theta_e}{m - \dot{Z}_{\dot{w}}} \\
 -\frac{mg \sin \theta_e}{m - \dot{Z}_{\dot{w}}} \\
 -\frac{\dot{M}_{\dot{w}} mg \sin \theta_e}{I_y(m - \dot{Z}_{\dot{w}})}
 \end{array}$$

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

Cuadro D.13: Derivadas de estabilidad aerodinámica lateral-direccional reducidas.

<b><i>Derivada reducida</i></b>	<b><i>Expresión matemática dimensional</i></b>
$y_v$	$\frac{\dot{Y}_v}{\eta}$
$y_p$	$\frac{\dot{Y}_p + mW_e}{m}$
$y_r$	$\frac{\dot{Y}_r - mU_e}{m}$
$y_\phi$	$g \cos \theta_e$
$y_\psi$	$g \sin \theta_e$
$l_v$	$\frac{I_z \dot{L}_v + I_{xz} \dot{N}_v}{I_x I_z - I_{xz}^2}$
$l_p$	$\frac{I_z \dot{L}_p + I_{xz} \dot{N}_p}{I_x I_z - I_{xz}^2}$
$l_r$	$\frac{I_z \dot{L}_r + I_{xz} \dot{N}_r}{I_x I_z - I_{xz}^2}$
$l_\phi$	0
$l_\psi$	0
$n_v$	$\frac{I_x \dot{N}_v + I_{xz} \dot{L}_v}{I_x I_z - I_{xz}^2}$
$n_p$	$\frac{I_x \dot{N}_p + I_{xz} \dot{L}_p}{I_x I_z - I_{xz}^2}$
$n_r$	$\frac{I_x \dot{N}_r + I_{xz} \dot{L}_r}{I_x I_z - I_{xz}^2}$
$n_\phi$	0
$n_\psi$	0

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.

Cuadro D.14: Derivadas de control aerodinámico reducidas.

<b><i>Derivada reducida</i></b>	<b><i>Expresión matemática dimensional</i></b>
$x_\eta$	$\frac{\dot{X}_\eta}{m} + \frac{\dot{X}_{\dot{w}} \dot{Z}_\eta}{m(m - \dot{Z}_{\dot{w}})}$
$z_\eta$	$\frac{\dot{Z}_\eta}{m - \dot{Z}_{\dot{w}}}$
$m_\eta$	$\frac{\dot{M}_\eta}{I_y} + \frac{\dot{M}_{\dot{w}} \dot{Z}_\eta}{I_y(m - \dot{Z}_{\dot{w}})}$

$y_\xi$	$\frac{\dot{Y}_\xi}{m}$
$l_\xi$	$\frac{I_z \dot{L}_\xi + I_{xz} \dot{N}_\xi}{I_x I_z - I_{xz}^2}$
$n_\xi$	$\frac{I_x \dot{N}_\xi + I_{xz} \dot{L}_\xi}{I_x I_z - I_{xz}^2}$
$y_\zeta$	$\frac{\dot{Y}_\zeta}{m}$
$l_\zeta$	$\frac{I_z \dot{L}_\zeta + I_{xz} \dot{N}_\zeta}{I_x I_z - I_{xz}^2}$
$n_\zeta$	$\frac{I_x \dot{N}_\zeta + I_{xz} \dot{L}_\zeta}{I_x I_z - I_{xz}^2}$

---

Fuente: Cook, M. V. (2012). *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.



# Bibliografía

- [1] Antonio Rañada. *Dinámica clásica*. Alianza Madrid, 1990.
- [2] Alejandro Medina Domínguez y Jesús. Ovejero Sánchez. *Leyes de Newton y sus aplicaciones*. Primera Edición. Universidad de Salamanca, 2011. URL: [http://ocw.usal.es/enseñanzas-tecnicas/fisica-i/contenidos/temas\\_por\\_separado/2\\_ap\\_newton1011.pdf](http://ocw.usal.es/enseñanzas-tecnicas/fisica-i/contenidos/temas_por_separado/2_ap_newton1011.pdf).
- [3] Frank J Blatt y Virgilio González Pozo. *Fundamentos de física*. QC23 B5218 1991. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1991.
- [4] Miguel Ángel Gómez Tierno, Manuel Pérez Cortés y César Puentes Márquez. *Mecánica del vuelo*. Ibergaceta, 2012.
- [5] Michael V Cook. *Flight dynamics principles: a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann, 2012.
- [6] Robert C Nelson y otros. *Flight stability and automatic control*. Vol. 2. WCB-McGraw Hill New York, 1998.
- [7] Jan Roskam y Chuan-Tau Edward Lan. *Airplane aerodynamics and performance*. DARcorporation, 1997.
- [8] Administración espacial y aeronáutica nacional-NASA. *Lift to Drag Ratio*. 2019. URL: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/ldrat.html>.
- [9] Parry Moon y Domina E Spencer. *Field theory handbook: including coordinate systems, differential equations and their solutions*. Springer, 2012.
- [10] Jan Roskam. *Airplane flight dynamics and automatic flight controls*. DARcorporation, 1998.
- [11] Wikipedia. *Regla de la mano derecha* — *Wikipedia, La enciclopedia libre*. [Internet; descargado 9-junio-2019]. 2019. URL: [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Regla\\_de\\_la\\_mano\\_derecha&oldid=113885555](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Regla_de_la_mano_derecha&oldid=113885555).
- [12] Benjamin C Kuo y Farid Golnaraghi. *Automatic control systems*. Vol. 9. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1995.

- [13] Unidad Administrativa Especial de Aeronáutica Civil. *RAC 45-Identificación de Aeronaves y Componentes de Aeronaves*. Inf. téc. UAEAC, 2018.
- [14] Martin Simons y Paul A Schweizer. *Sailplanes by Schweizer: A History*. Crowood Press, 1998.
- [15] Mario Alberto Pérez, Analía Pérez Hidalgo y Elisa Pérez Berenguer. *Introducción a los sistemas de control y modelo matemático para sistemas lineales invariantes en el tiempo*. 2008. URL: <http://dea.unsj.edu.ar/control1b/teoria/unidad1y2.pdf>.
- [16] MathWorks. *Step*. 2019. URL: <https://la.mathworks.com/help/control/ref/step.html>.
- [17] Henao C. Claudia M. “Diseño detallado de la superficie alar y mecanismos de hiper-sustentación y control de un Planeador Luftwinter”. En: *Ingenierías USB Bogotá Vol 1* (2007), pág. 118.
- [18] Pinto G. Oscar F. “Diseño estructural detallado del fuselaje de las tesis titulada ”Diseño preliminar de un planeador de ala rígida con vuelo controlado”. En: *Biblioteca USB Bogotá Vol 1* (2008), pág. 126.
- [19] Jimmy Alexander Castro Sánchez y Aurelio Mendez Moreno. *Diseño y construcción de un vehículo aéreo no tripulado con capacidad para transportar un sistema de transmisión de vídeo en tiempo real*. Bogotá: Fundación Universitaria Los Libertadores, 2012.
- [20] Alejandro Mejía Giraldo, Alex Adrián López Ríos y otros. “Diseño preliminar de un planeador en configuración ala volante con capacidad para una persona”. En: (2014).
- [21] Carranza V. Paula M. y Chapetón C. Andrés F. *Estudio del rendimiento aerodinámico y de estabilidad sobre la implementación de un ala de envergadura variable para una aeronave tipo planeador de entrenamiento categoría utilitaria*. Bogotá: Universidad San Buenaventura, 2015.
- [22] Piero Morelli. “On the dynamic longitudinal stability of sailplanes with fixed and free controls”. En: *OSTIV Publications* 6 (1961).
- [23] Steven J Rasmussen. *Application of Nonlinear QFT to Flight Control Design for High Angle of Attack Maneuvers with Thrust Vectoring*. Inf. téc. AIR FORCE INST OF TECH WRIGHT-PATTERSON AFB OH SCHOOL OF ENGINEERING, 1991.
- [24] Guido de Matteis. “Longitudinal dynamics of a towed sailplane”. En: *Journal of guidance, control, and dynamics* 16.5 (1993), págs. 822-829.
- [25] G De Matteis y W Tamilia. “Stability augmentation of a sailplane in towed flight”. En: *The Aeronautical Journal* 97.970 (1993), págs. 349-356.

- 
- [26] Xavier Borrell Rodriguez. “Modelización CAD y análisis aerodinámico y estructural del planeador Fauvel AV-22”. B.S. thesis. Universitat Politècnica de Catalunya, 2010.
- [27] Unidad Administrativa Especial de Aeronáutica Civil. *RAC 22-Estándares de aeronavegabilidad: planeadores y moto planeadores*. Inf. téc. UAEAC, 2018.
- [28] European Union Aviation Safety Agency. *CS 22-Sailplanes and Powered Sailplanes*. Inf. téc. EASA, 2009.
- [29] Military Standard. *Flying qualities of piloted vehicles*. Inf. téc. MIL-STD-1797A, 1990.
- [30] D. Moorhouse y R. Woodcock. *US military specification MIL-F-8785C*. Inf. téc. US Department of Defense: Washington DC, USA., 1980.
- [31] DEF-STAN. STAN 00-970. MOD. *Design and Airworthiness Requirements for Service Aircraft*. Inf. téc. UK Ministry of Defence., 2003.
- [32] S Cook y R Brigaud. “Introduction to NATO STANAG 4671-UAV Systems Airworthiness Requirements (Z)”. En: *AUVSI North America* (2009).
- [33] Department of Transportation Federal Aviation Administration. *Type Certificate Data Sheet NO. G-18*. 2007. URL: [http://www.airweb.faa.gov/Regulatory\\_and\\_Guidance\\_Library/rgMakeModel.nsf/0/979408739f29dc26862573b4006eda10/%5C\\$FILE/g-18.pdf](http://www.airweb.faa.gov/Regulatory_and_Guidance_Library/rgMakeModel.nsf/0/979408739f29dc26862573b4006eda10/%5C$FILE/g-18.pdf).
- [34] Schweizer Aircraft Corporation. *The 2-22 Sailplane Flight-Erection-Maintenance Manual*. Schweizer Aircraft Corporation, 1946.
- [35] Mohammad H Sadraey. *Aircraft design: A systems engineering approach*. John Wiley y Sons, 2012.
- [36] MIT Education. *AVL Overview*. 2007. URL: <http://web.mit.edu/drela/Public/web/avl/>.
- [37] Enrique Lira. *La importancia de la velocidad óptima de planeo*. 2018. URL: <https://vuela.com.mx/am/articulos/5522-la-importancia-de-la-velocidad-optima-de-planeo.html>.
- [38] University of Illinois at Urbana-Champaign-Department of Aerospace Engineering. *UIUC Airfoil Coordinates Database*. 2019. URL: [https://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord\\_database.html](https://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord_database.html).