

**Modelo de pronóstico para las ventas semanales en la empresa Américas BPS en
la campaña ETB**



**Javier Alfredo Guevara
Luis Carlos Moreno**

**Fundación Universitaria Los Libertadores
Departamento de Ciencias Básicas
Especialización en estadística aplicada**

**Bogotá D.C.
2016**

**Modelo de pronóstico para las ventas semanales en la empresa Américas BPS en
la campaña ETB**



**Javier Alfredo Guevara
Luis Carlos Moreno**

Asesor estadístico: Juan Camilo Santana

**Fundación Universitaria Los Libertadores
Departamento de Ciencias Básicas
Especialización en estadística aplicada**

**Bogotá D.C.
2016**

Nota de Aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Bogotá, D.C 31 Julio del 2016

Las Directivas de la Universidad de
Los Libertadores, los jurados calificadores y el cuerpo
Docente no son responsables por los
criterios e ideas expuestas En el presente documento.
Estos corresponde únicamente a los autores

Contenido

Resumen	8
CAPITULO 1. Introducción	10
Formulación o Pregunta Problema	11
Objetivo General	11
Objetivos específicos	11
Justificación	12
CAPITULO 2. Marco de Referencia	13
CAPITULO 3. Marco Teórico	15
Modelo Holt Winters	15
Modelo ARMA	16
Modelo ARMAX	20
CAPITULO 4. Marco Metodológico	21
CAPITULO 5. Resultados	22
Aplicación del modelo HoltWinters	27
Aplicación del modelo arma(p,q)	31
Elección del mejor modelo	35
Modelo ARMAX.....	35
CAPITULO 7. Referencias	41

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Valor en pesos ventas semanales campaña ETB	22
Tabla 2. Resultados estadísticos descriptivos de la campaña ETB	23
Tabla 3. Datos luego de la transformación Box Cox	24
Tabla 4. Resultados descriptivos luego de transformación Box Cox	24
Tabla 5. Serie sin los últimos 8 periodos	30
Tabla 6. Datos observados y ajustados con modelo HoltWinters	30
Tabla 7. Comparación resultados AIC.....	31
Tabla 8. Datos observados y ajustados con el modelo ARMA (1,1).....	34
Tabla 9. Resultados raíz cuadrada de la media.....	35
Tabla 10. Variables Exógenas	36
Tabla 11. Variables exógenas significativas.....	36
Tabla 12. Datos observados y ajustados con el modelo ARMAX 1.1	38

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Metodología de Box Jenkis	19
Figura 2. Comportamiento de ventas en pesos año 2015 campaña ETB.....	23
Figura 3. Comparación de comportamiento luego de transformación Box Cox Vs Datos Originales.....	25
Figura 4. Correlación de residuos de la serie.....	26
Figura 5. Modelo Aditivo	27
Figura 6. Modelo Multiplicativo.....	28
Figura 7. Comportamiento gráfico residuos serie HoltWinters.....	28
Figura 8. Resultados gráficos de los residuales del modelo HoltWinters	29
Figura 9. Comparación datos observados Vs predicción según modelo HoltWinters	31
Figura 10. Comportamiento grafico residuos	32
Figura 11. Correlación de residuos	32
Figura 12. Correlación parcial residuos	32
Figura 13. Histograma de distribución residuos	33
Figura 14. QQ plot residuos	33
Figura 15. Comparativa datos iniciales Vs predicción hecha con modelo ARMA(1,1)	35
Figura 16. ACF y PACF Variable de estudio (Valor Ventas)	36
Figura 17. Prueba de estadísticos	37
Figura 19. Comparativa datos iniciales Vs predicción hecha con modelo ARMAX(1,1)	39

LISTA DE ECUACIONES

Ecuación 1. Modelo aditivo.....	16
Ecuación 2. Modelo multiplicativo	16
Ecuación 3. Componentes modelo aditivo	16
Ecuación 4. Componentes modelo multiplicativo.....	16
Ecuación 5. Proceso AR(1).....	16
Ecuación 6. Proceso AR(2).....	17
Ecuación 7. PROCESO AR(p)	17
Ecuación 8. Proceso MA(1).....	17
Ecuación 9. Proceso MA(2).....	17
Ecuación 10. Proceso MA(q).....	17
Ecuación 11. Proceso ARMA(1,1)	18

Modelo de pronóstico para las ventas semanales en la empresa Américas BPS en la campaña ETB

****Javier Alfredo Guevara¹**

Luis Carlos Moreno²

Resumen

Actualmente, en la empresa Américas BPS no se cuenta con un modelo que pronostique el comportamiento de las ventas a futuro en el área de solicitud de quejas y reclamos (S&R&R), área encargada de las ventas. Hecho que genera una gran incertidumbre y que además no permite conocer la inversión de recursos en todas las áreas involucradas. Por esto con la herramienta mencionada, se pretende tener un panorama más claro que facilite la planeación en las áreas tanto de S&R&R como operativas que optimicen la eficiencia de la compañía.

Para la creación de dicho modelo, se realiza el análisis de la serie de la variable de estudio y se aplican los modelos HoltWinters, ARMA y ARMAX, con el fin de determinar cuál es el más adecuado y que se ajusta de mejor forma al comportamiento de los datos, además se determina cuales son las variables exógenas que explican la variable de estudio.

Una vez hecho el procedimiento mencionado se concluye que el mejor modelo de pronóstico para la serie de nuestro estudio, es el modelo Holt Winters, dado que su comportamiento grafico se adapta mejor al comportamiento de la serie y su error es menor en comparación al ARMA (1,1).

No todas las series de tiempo estacionarias pueden ser determinadas y predecidas por un solo tipo de modelo sin su respectivo análisis, dado que el análisis de variables es cambiante y dinámico, por esto es necesario analizar los datos con varios modelos para su respectiva comparación y así tomar la mejor decisión.

Una vez realizado el modelo ARMAX, se llega a la conclusión que son: número de ventas que ingresaron en cada semana y comisión por venta.

Palabras Clave: procesos estocásticos, Modelo HoltWinters, modelo ARMA, modelo ARMAX, SSE, RMSE, AIC.

¹Ingeniero Industrial Universidad los Libertadores, e-mail: jalfreg@hotmail.com

²Economista, Universidad Autónoma de Colombia, e-mail angra24@hotmail.com

Forecast model for weekly sales in Americas BPS company campaign ETB

**Javier Alfredo Guevara,
Luis Carlos Moreno**

Abstract

Currently, the company is not Americas BPS has a model that predicts the behavior of future sales in the area of application of complaints (S&R&R), in charge of sales area. This fact creates great uncertainty and also does not reveal the investment of resources in all areas involved. For this with the tool mentioned, it is to have a clearer picture to facilitate planning in the areas of both S&R&R as to optimize operational efficiency of the company.

Keywords: forecast, stochastics, Holt Winters model, ARMA model, ARMAX model, SSE, RMSE, AIC.

To create this model, the analysis of the series variable study is conducted and models Holt Winters, ARMA and ARMAX are applied in order to determine the most appropriate and conforms to better behavior data also determined which are the exogenous variables that explain the study variable.

Once the procedure referred fact it is concluded that the best forecasting model for the series of our study is the model Holt Winters, as its graphic behavior better behavior of the series adapts and error is smaller compared to the ARMA (1.1).

Not all stationary time series can be determined and predicted by a single type of model without their analysis, since analysis variables is changing and dynamic, so it is necessary to analyze the data with several models for their respective comparison and so make the best decision.

Once the ARMAX model, it concludes are: number of sales each week and entered sales commission.

CAPITULO 1. Introducción

Muchas organizaciones no conocen las herramientas estadísticas ni el beneficio que pueden obtener de ellas. Es clave en la toma de decisiones contar con elementos de juicio concretos que permitan tener un panorama claro de las situaciones en cualquier instante del tiempo (pasado, presente o futuro). Lo dicho anteriormente es muy importante y necesario dentro de la administración porque facilita hacer una correcta planeación, tomar medidas preventivas y hacer planes de acción basados en el comportamiento de datos.

Américas BPS, es una estructura de Business Process Services, que se traduce en una evolución del concepto de tercerización y que añade un valor significativo a través del desarrollo de procesos de negocio únicos apoyados en tecnología contribuyendo a la construcción y mejoramiento de la propuesta de valor de los clientes.

El cliente ETB, con el que se lleva trabajando en Américas BPS desde hace 15 años y del cual hacen parte 1200 colaboradores solo en las operaciones de experiencia al cliente en Bogotá y Cali, se encuentra en un proceso de mejora la experiencia que se le ofrece a los clientes de ETB como parte de su estrategia corporativa. Durante estos 15 años el área de solicitudes, quejas y reclamos (S&R&R) se encargaba de atender estas peticiones de los clientes, hasta que en el año 2015 se comenzó a trabajar con las ventas realizando una función mixta, esta decisión fue tomada por parte de la gerencia de experiencia al cliente de ETB y la gerencia de Américas BPS.

El motivo y la razón es que en el proceso de cambio de tecnología de cobre a fibra los clientes de ETB realizaban sus llamadas de información en baja etapa de facturación y allí ofrecer el servicio realizando el procedimiento de venta; por otra parte los clientes que solo contaban con un solo servicio caso particular línea telefónica se realizaba el ofrecimiento de banda ancha.

El departamento de Aseguramiento (BackOffice), era el encargado de llevar estrictamente un control y registro sobre las ventas ingresadas del área de S&R&R, pero no contaban con el recurso y conocimiento para realizar un pronóstico claro y efectivo sobre cuantas ventas serían ingresadas semana tras semana, ya que, su especialización son las quejas y los reclamos, por lo tanto realizar una proyección y presupuesto para el tema de ventas en la campaña era complicado.

Se están registrando los datos de ventas en el área de S&R&R desde 2015, además del registro de otras variables que serán también parte del estudio como son: Llamadas semanales, comisión por venta, valor de las ofertas, número de asesores, horas de trabajo ejecutadas e ingresos de cada asesor. Aunque la responsabilidad de las ventas de la campaña ETB es de dicho departamento, las está ejecutando el área de quejas y reclamos por el momento, sin embargo aunque el registro existe, no hay ningún control estadístico sobre estos datos.

La situación anterior genera una gran incertidumbre en el comportamiento futuro de las ventas ya que no permite conocer con certeza la inversión de recursos en todas las áreas involucradas en la campaña ETB (personal, equipos, servicios públicos, tiempo, entre otros) ni podríamos hacer una proyección de utilidades. Es decir se carece de elementos claves para la planeación.

Con base en lo anterior se hace necesario el uso de técnicas estadísticas que faciliten el trabajo dentro de las organizaciones, las cuales, si son utilizadas de la forma adecuada y se interpretan correctamente, serán un aliado que dará una dirección correcta al administrador y dará una visión más clara de los eventos futuros.

Por las razones mencionadas se generará la herramienta de pronóstico adecuada para las ventas de la campaña ETB, con los datos semanales del año 2015 y con la cual se pretende predecir su comportamiento. Esto servirá para dar a conocer la necesidad y la importancia del uso de métodos estadísticos dentro de la empresa Américas BPS.

Formulación o Pregunta Problema

Se formula el diseño de un modelo de pronóstico basado en un método de series temporales, que genere valor y de certeza en el mayor porcentaje posible respecto al comportamiento futuro de las ventas semanales en la empresa Américas BPS de la campaña ETB.

Objetivo General

Crear un modelo de pronóstico que permita la predicción de las ventas basado los registros semanales de la empresa Américas BPS en la campaña ETB mediante el uso de series de tiempo.

Objetivos específicos

- Evaluar la capacidad de pronóstico para los últimos 8 datos ó 2 meses de las ventas semanales de la empresa Américas BPS en la campaña ETB.
- Determinar el mejor modelo de pronóstico usando el indicador estadístico adecuado, para el análisis de las ventas semanales de la empresa Américas BPS en la campaña ETB.
- Identificar las variables exógenas que tienen mayor influencia en las ventas semanales de la empresa Américas BPS en la campaña ETB.

Justificación

Se pretende suministrar a la empresa Américas BPS, una herramienta útil, que genere valor a través de la predicción de eventos permitiendo la optimización de la operación en el corto plazo de las áreas involucradas en las ventas semanales de la campaña ETB, como son el área de quejas y reclamos, ventas, recursos humanos, sistemas, compras, y todas aquellas que estén relacionadas con la planeación y manejo de recursos necesarios para el desarrollo de actividades.

CAPITULO 2. Marco de Referencia

El Modelo de pronóstico para las ventas semanales en la empresa Américas BPS en la campaña ETB (variable de estudio), estará basado en el comportamiento histórico de las ventas, las cuales se definen como la relación exitosa que termina en la adquisición de un producto ofertado por un consumidor final. Dichos datos que se han venido registrando en la compañía desde Enero de 2015.

El producto mencionado anteriormente se refiere a paquetes de telecomunicaciones a nivel empresarial, hogar y móvil, también de Internet, telefonía y televisión, los cuales se ofrecen en diferentes combos y precios dependiendo de las promociones establecidas por la empresa.

La función de las ventas ha sido parte integral de la actividad comercial durante el último en la campaña de ETB (S&R&R) con el fin de solucionar los problemas del cliente y así construir relaciones a largo plazo. Las personas (agentes) eficientes han aprendido que el análisis de necesidades ha reemplazado la presentación de ventas como el paso más importante en el proceso de venta.

Por otra parte, se encuentran factores que pueden influir en las variaciones de las ventas, entre las cuales se pueden mencionar: la evolución de los gustos de los clientes ya existentes en la empresa y los cambios en los deseos propios de compra en general, la competencia que se tiene actualmente en el mercado y mejores desde el punto de vista tecnológico y cobertura.

Las ventas están registradas en frecuencias semanales que durante el año 2015 sumaron 53 datos correspondientes a las semanas del año, estos registros se hicieron en el área de quejas y reclamos de la empresa, la cual está realizando su labor como tal y adicionalmente está haciendo labores comerciales, dentro de las cuales está la cuenta ETB, base de nuestro estudio(Américas BPS, 2014).

La empresa Américas BPS cuenta en la actualidad con sede principal en la ciudad de Bogotá y con sucursales en las ciudades de Cali y Medellín. El inicio de operaciones en la empresa inició en el año 2003, en la cual conceptos como la fidelización del cliente, la actualización tecnológica, la innovación, el enfoque en resultados; y con una sólida trayectoria en el desarrollo de procesos de negocio, se ha convertido en una de las principales compañías en el sector, que ofrece soluciones únicas y flexibles de acuerdo a las necesidades de los clientes y del mercado(BPS, 2015).

Los productos y servicios que ofrece la compañía son:

Gestión de Peticiones, Quejas y Reclamos, servicios de Información & Asistencia, Back Office, digitación, tabulación y consolidación de archivos, cruce e Inteligencia de Información, ventas y Mercadeo (Aquí se basa nuestro estudio): Servicios comerciales para los clientes.

La variable de estudio esta teóricamente afectada por factores o variables tales como: Llamadas semanales efectuadas, número de ventas logradas, comisiones por venta para los agentes, valor de la oferta semanal, número de agentes en el periodo de tiempo, horas programadas, ingresos de los agentes.

Las incidencias o no de las anteriores sobre nuestra variable de estudio serán demostradas posteriormente en este trabajo mediante el uso del modelo estadístico adecuado.

CAPITULO 3. Marco Teórico

Dados los modelos mencionados y que serán usados para el desarrollo de este estudio, se relaciona a continuación una breve teoría de estos:

Modelo HoltWinters

El modelo HoltWinters, hace parte de los métodos de alisamiento exponencial que en esencia son métodos para ajustar una curva apropiada a datos históricos de una determinada serie de tiempo. Existe una diversidad de estos modelos, como el de alisamiento exponencial sencillo, el método lineal de Holt y el método de Holt-Winters, así como sus variaciones. La particularidad de esta clase de modelos es que permite estimar componentes de tendencia y ciclo.(Gujarati, 2009, pág. 774).

El modelo Holt-Winters incorpora un conjunto de procedimientos que conforman el núcleo de la familia de series temporales de suavizamiento o alisamiento exponencial. A diferencia de muchas otras técnicas, el modelo Holt-Winters puede adaptarse fácilmente a cambios y tendencias, así como a patrones estacionales(Gujarati, 2009). En comparación con otras técnicas, como ARIMA, el tiempo necesario para calcular el pronóstico es considerablemente más rápido. Esto significa que cualquier usuario con suficiente pero no necesariamente mucha experiencia puede poner en práctica la técnica de Holt-Winters. Más allá de sus características técnicas, su aplicación en entornos de negocio es muy común. De hecho, Holt-Winters se utiliza habitualmente por muchas compañías para pronosticar la demanda a corto plazo cuando los datos de venta contienen tendencias y patrones estacionales de un modo subyacente.

Los pronósticos de ventas mensuales requieren tres componentes para realizar la ecuación:

- a. El actual nivel de ventas subyacente, que permanece tras haber desestacionalizado las ventas y haber restado el efecto de factores aleatorios.
- b. La tendencia actual que siguen las ventas. Es decir, el cambio en el nivel subyacente de ventas que esperamos suceda entre el momento actual y el próximo mes. Por ejemplo, si estimamos nuestro nivel actual en 500 unidades y esperamos que sea de 505 unidades el siguiente mes, entonces nuestra tendencia estimada es de +5 unidades.
- c. El índice estacional para el mes que estamos pronosticando. Si nuestra estimación es 1.2, esto significa que esperamos que nuestras ventas este mes sean 20% por encima del nivel subyacente de dicho mes, mostrando así que nuestros productos se venden relativamente bien en ese momento del año

Si Y_t es la serie temporal cuya característica particular es una marcada tendencia y ciclo,

entonces es posible describir la dinámica de la serie observada de la siguiente manera:

$$Y_{t+k} = M_t + k * T_t + C_{t+k-s}$$

Ecuación 1. Modelo aditivo(1, 2016)

$$Y_{t+k} = (M_{t+k} * T_t) C_{t+k-s}$$

Ecuación 2. Modelo multiplicativo(1, 2016)

El objetivo metodológico es estimar un conjunto de parámetros que describa de la mejor forma la dinámica de la serie temporal a través de sus tres componentes como se aprecia enseguida:

$$M_t = \alpha Y_t - C_{t-s} + (1 - \alpha)(M_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta F_t - C_{t-s} + (1 - \beta) - 1$$

$$C_t = \gamma Y_t - M_t + (1 - \gamma) - s$$

Ecuación 3. Componentes modelo aditivo(1, 2016)

$$M_t = \alpha Y_t C_{t/s} + (1 - \alpha)(M_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta M_t - M_{t-1} + (1 - \beta) - 1$$

$$C_t = \gamma Y_t / M_t + (1 - \gamma) - s$$

Ecuación 4. Componentes modelo multiplicativo(1, 2016)

Las ecuaciones se resuelven de manera recursiva, minimizando el error cuadrático medio y partiendo de valores iniciales para las tres componentes, lo cual implica excluir algunos valores de la muestra.

Modelo ARMA

Para poder entender este modelo, debemos saber primero que este posee 2 componentes, el AR y el MA, los cuales se explican respectivamente a continuación:

Proceso autorregresivo (AR)

Sea Y_t el logaritmo del PIB en el periodo t . Si se modela Y_t como

$$(Y_t - \delta) = \alpha_1 (Y_{t-1} - \delta) + u_t$$

Ecuación 5. Proceso AR(1)(Gujarati, 2009)

Donde δ es la media de Y y u_t es un término de error aleatorio no correlacionado con media cero y varianza constante σ^2 (es decir, ruido blanco), se dice que Y_t sigue un proceso estocástico autorregresivo de primer orden, o AR(1).

Aquí el valor de Y en el tiempo t depende de su valor en el periodo anterior y de un término aleatorio; los valores de Y están expresados como desviaciones de su valor medio. En otras

palabras, este modelo dice que el valor de pronóstico de Y en el periodo t es simplemente alguna proporción (α_1) de su valor en el periodo (t - 1) más un “choque” o perturbación aleatoria en el tiempo t; de nuevo, los valores de Y están expresados alrededor del valor de su media. Pero si consideramos este modelo.

$$\boxed{Y_t - \delta = \alpha_1(Y_{t-1} - \delta) + \alpha_2(Y_{t-2} - \delta) + u_t}$$

Ecuación 6. Proceso AR(2)(Gujarati, 2009)

Decimos que Y_t sigue un proceso autorregresivo de segundo orden o AR(2). Es decir, el valor de Y en el tiempo t depende de sus valores en los dos periodos anteriores, los valores de Y expresados alrededor del valor de su media δ . En general, tenemos:

$$\boxed{Y_t - \delta = \alpha_1(Y_{t-1} - \delta) + \alpha_2(Y_{t-2} - \delta) + \dots + \alpha_p(Y_{t-p} - \delta) + u_t}$$

Ecuación 7. PROCESO AR(p)(Gujarati, 2009)

En cuyo caso Y_t es un proceso autorregresivo de orden p, o AR(p). Observe que en todos los modelos anteriores sólo se consideran los valores actuales y anteriores de Y; no hay otras regresoras. En este sentido, decimos que “los datos hablan por sí mismos”. Son una clase de modelos de forma reducida a los cuales hicimos referencia en el análisis de los modelos de ecuaciones simultáneas.

Proceso de medias móviles (MA)

El proceso AR recién expuesto no es el único mecanismo que pudo generar a Y. Suponga que hacemos un modelo de Y de la siguiente manera:

$$\boxed{Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}}$$

Ecuación 8. Proceso MA(1)(Gujarati, 2009)

Donde μ es una constante y u , al igual que antes, es el término de error estocástico de ruido blanco. Aquí, Y en el periodo t es igual a una constante más un promedio móvil de los términos de error presente y pasado. Así, en este caso decimos que Y sigue un proceso de promedios móviles de primer orden, o MA(1). Pero si Y sigue la expresión:

$$\boxed{Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2}}$$

Ecuación 9. Proceso MA(2)(Gujarati, 2009)

$$\boxed{Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \dots + \beta_q u_{t-q}}$$

Ecuación 10. Proceso MA(q)(Gujarati, 2009)

Es un proceso MA(q). En resumen, un proceso de promedios móviles es tan sólo una combinación lineal de términos de error de ruido blanco.

Proceso autorregresivo y de promedios móviles (ARMA)

Desde luego, es muy probable que Y tenga características de AR y de MA a la vez, y, por consiguiente, sea ARMA. Así, Y_t sigue un proceso ARMA(1, 1) si se escribe como:

$$Y_t = \theta + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}$$

Ecuación 11. Proceso ARMA(1,1)(Gujarati, 2009)

Porque hay un término autorregresivo y uno de promedios móviles. θ representa un término constante. En general, en un proceso ARMA(p, q), habrá p términos autorregresivos y q términos de promedios móviles.(Gujarati, 2009)

La metodología de Box-Jenkins marcó el comienzo de una nueva generación de herramientas de pronóstico pero técnicamente conocida como metodología ARIMA, el interés de estos métodos de pronósticos no está en la construcción de modelos uniecuacionales o de ecuaciones simultáneas, sino en el análisis de las propiedades probabilísticas, o estocásticas, de las series de tiempo económicas por sí mismas según la filosofía de que los datos hablen por sí mismos. A diferencia de los modelos de regresión, en los cuales Y_t se explica por las k regresoras $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$, en los modelos de series de tiempo del tipo Box Jenkins, Y_t se explica por valores pasados o rezagados de sí misma y por los términos de error estocásticos. Por esta razón, los modelos ARIMA reciben algunas veces el nombre de modelos ateóricos porque no se derivan de teoría económica alguna, y las teorías económicas a menudo son la base de los modelos de ecuaciones simultáneas(Gujarati, 2009, pág. 881).

Los modelos de series de tiempo analizados se basan en el supuesto de que las series de tiempo consideradas son (débilmente) estacionarias, en pocas palabras, la media y la varianza de una serie de tiempo débilmente estacionaria son constantes y su covarianza es invariante en el tiempo. Pero sabemos que muchas series de tiempo económicas son no estacionarias.

El punto importante es que, para utilizar la metodología Box-Jenkins, debemos tener una serie de tiempo estacionaria o una serie de tiempo que sea estacionaria después de una o más diferenciaciones. La razón para suponer estacionariedad se explica de la siguiente manera:

El objetivo de BJ [Box-Jenkins] es identificar y estimar un modelo estadístico que se interprete como generador de los datos muestrales. Entonces, si se va a pronosticar con este modelo estimado, debesuponerse que sus características son constantes a través del tiempo y, en particular, en periodos futuros. Así, la sencilla razón para requerir datos estacionarios es que todo modelo que se infiera apartir de estos datos

pueda interpretarse como estacionario o estable en sí mismo, y proporcione, por consiguiente, una base válida para pronosticar. (Pokorny, 1987, pág. 343).

La pregunta clave es obvia: al ver una serie de tiempo, ¿cómo sabemos si sigue un proceso AR puro (de ser así, cuál es el valor de p), un proceso MA puro (de ser así, cuál es el valor de q), un proceso ARMA (de ser así, cuáles son los valores de p y q) La metodología BJ resulta útil para responder la pregunta anterior. El método considera cuatro pasos:

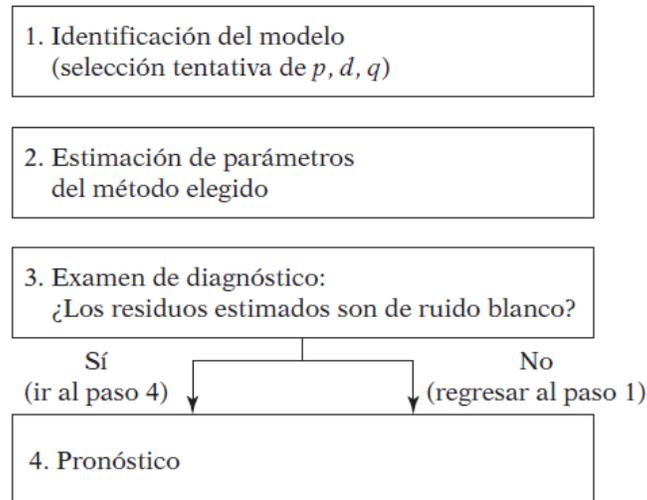


Figura 1. Metodología de Box Jenkins

Explicando la figura 1, tenemos:

Paso 1. Identificación. Es decir, encontrar los valores apropiados de p , d y q . En seguida veremos la forma como el correlograma ACF y el correlograma parcial PACF ayudan en esta labor. (Gujarati, 2009).

Paso 2. Estimación. Tras identificar los valores apropiados de p y q , la siguiente etapa es estimar los parámetros de los términos autorregresivos y de promedios móviles incluidos en el modelo. Algunas veces, este cálculo se efectúa mediante mínimos cuadrados simples, pero otras hay que recurrir a métodos de estimación no lineal (en parámetros). Como esta labor se lleva a cabo ahora a través de rutinas en diversos paquetes estadísticos, en la práctica no es preciso preocuparse por los desarrollos matemáticos de la estimación. (Gujarati, 2009, pág. 813).

Paso 3. Examen de diagnóstico. Después de seleccionar un modelo ARIMA particular y de estimar sus parámetros, tratamos de ver si el modelo seleccionado se ajusta a los datos en forma razonablemente buena, pues es posible que exista otro modelo ARIMA que también lo haga. Es por esto que el diseño de modelos ARIMA de Box-Jenkins es un

arte más que una ciencia; se requiere gran habilidad para seleccionar el modelo ARIMA correcto. Una simple prueba del modelo seleccionado es ver si los residuales estimados a partir de este modelo son de ruido blanco; si lo son, aceptamos el ajuste particular; si no lo son, debemos empezar de nuevo. Por tanto, la metodología BJ es un proceso iterativo (figura 1). (Gujarati, 2009).

Paso 4. Pronóstico. Una razón de la popularidad del proceso de construcción de modelos ARIMA es su éxito en el pronóstico. En muchos casos, los pronósticos obtenidos por este método son más confiables que los obtenidos de modelos econométricos tradicionales, en particular en el caso de pronósticos de corto plazo. Por supuesto, cada caso debe verificarse (Gujarati, 2009).

Modelo ARMAX

Dentro del ARMA se encuentra el ARMAX, el cual es una extensión que permite integrar variables explicativas dentro del modelo, y de esta manera detectar cuáles son las variables más significativas y que influyen en la predicción del modelo que se vaya emplear para la respectiva toma de decisiones.

CAPITULO 4. Marco Metodológico

Unidad de análisis

Se maneja una base-matriz de datos que cuenta con las siguientes variables que influyen en el comportamiento de las ventas como lo son: llamadas semanales, número de ventas, valor de ventas que es la (variable de estudio), comisión por venta, valor-precio oferta de la semana, número de agentes, horas programadas y los ingresos todas ellas correspondientes al periodo del 2015 en semanas que en su totalidad es de 53.

Instrumentos o herramientas

Ya construida la base de datos-matriz se procederá a realizar el diseño estadístico en el software R, el cual es un entorno y lenguaje de programación con un enfoque al análisis estadístico.

R es una implementación de software libre del lenguaje S pero con soporte de alcance estático. Se trata de uno de los lenguajes más utilizados en investigación por la comunidad estadística, siendo además muy popular en el campo de la minería de datos, la investigación biomédica, la bioinformática y las matemáticas financieras. A esto contribuye la posibilidad de cargar diferentes bibliotecas o paquetes con funcionalidades de cálculo o graficación.

R proporciona un amplio abanico de herramientas estadísticas (modelos lineales y no lineales, tests estadísticos, análisis de series temporales, algoritmos de clasificación y agrupamiento, etc.) y gráficas. Además, R puede integrarse con distintas bases de datos y existen bibliotecas que facilitan su utilización desde lenguajes de programación interpretados como Perl y Python.

Otra de las características de R es su capacidad gráfica, que permite generar gráficos con alta calidad. R posee su propio formato para la documentación basado en LaTeX.

Procedimiento

Se inicia con un diagnóstico inicial de la serie de datos y su comportamiento gráfico, dependiendo de ello será usado un método para reducir la volatilidad de los mismos, y a continuación se aplicara cada uno de los modelos seleccionados para nuestro estudio como son: Holt-Winters, ARMA,(modelos de pronostico)y ARMAX, (modelo de evaluación de incidencia de variables) y llegar a cumplir cada uno de los objetivos propuesto es este trabajo de investigación.

Por último haciendo un análisis de resultados se resuelve cuál de los modelos es el más propicio para realizar el pronóstico de ventas, los resultados y comportamiento de dichos pronósticos y cuáles son las variables más influyentes sobre las ventas de la campaña ETB.

CAPITULO 5. Resultados

La serie de datos presentada a continuacion, consta de 53 datos correspondientes a las semanas del año 2015, y obedecen al valor en pesos de las ventas semanales de la campaña ETB, tambien se observa el comportamiento gráfico de la serie.

Se observan en la figura 2 varios picos, especialmente en el mes octavo, además de un comportamiento cíclico que se repite aproximadamente cada mes (ó 4 semanas), teniendo en cuenta claro está que la escala está en semanas.

Tabla 1. Valor en pesos ventas semanales campaña ETB

1	300000	2550000	5100000	8000000
2	2550000	5050000	8275000	6875000
3	4200000	5525000	6475000	6825000
4	3475000	2375000	6875000	8000000
5	5075000	4650000	6950000	5325000
6	3800000	4325000	2875000	2325000
7	2525000	2950000	3275000	5675000
8	15700000	14300000	13650000	5425000
9	5025000	4850000	4025000	4675000
10	5525000	3100000	4400000	7225000
11	4975000	3775000	2475000	4375000
12	5025000	8075000	9700000	4250000
13	6825000	8625000	3250000	11800000
14	4075000			



Figura 2. Comportamiento de ventas en pesos año 2015 campaña ETB

Esto puede ser apoyado numéricamente viendo los resultados descriptivos de los datos de la tabla 1, en la tabla 2.

Tabla 2. Resultados estadísticos descriptivos de la campaña ETB

Valor ventas	
Media	5.609.906
Error típico	421.834
Mediana	5.025.000
Moda	2.550.000
Desviación estándar	3.071.000
Rango	15.400.000
Mínimo	300.000
Máximo	15.700.000
Suma	297.325.000
Cuenta	53

La dispersión de los datos es alta, basados en los valores mínimo (300.000) y máximo (15.700.000) de la tabla 2 y en el valor de la desviación estándar de 3.071.000, el cual es alto teniendo en cuenta también que esta es cerca al valor de la media, llegando a alcanzar el 54% del valor de esta.

Se hará una transformación Box-Cox a los datos, esto con el fin de tratar de reducir la dispersión de los datos. Las transformaciones de Box y Cox son una familia de transformaciones potenciales usadas en estadística para corregir sesgos en la distribución de errores, para corregir varianzas desiguales (para diferentes valores de la variable predictora).

y principalmente para corregir la no linealidad en la relación (mejorar correlación entre las variables). Esta transformación recibe el nombre de los estadísticos George E. P. Box y David Cox(Wikipedia).

La transformación para nuestros datos se presenta en la tabla 3.

Tabla 3. Datos luego de la transformación Box Cox

1	645.654	1.694.968	2.316.208	2.836.860
2	1.694.968	2.305.952	2.880.369	2.649.696
3	2.122.243	2.401.238	2.579.119	2.641.000
4	1.948.598	1.641.529	2.649.696	2.836.860
5	2.311.087	2.221.811	2.662.676	2.361.690
6	2.028.685	2.150.467	1.789.103	1.625.866
7	1.687.460	1.809.983	1.897.248	2.430.386
8	3.843.185	3.684.910	3.608.526	2.381.564
9	2.300.803	2.264.359	2.081.943	2.227.184
10	2.401.238	1.850.884	2.167.186	2.709.621
11	2.290.463	2.022.662	1.672.321	2.161.630
12	2.300.803	2.848.807	3.094.019	2.133.587
13	2.641.000	2.934.610	1.890.710	3.379.472
14	2.093.554			

Ahora podemos ver los resultados estadísticos descriptivos de los datos transformados:

Tabla 4. Resultados descriptivos luego de transformación Box Cox

Valores transformados	
Media	2.336
Error típico	78
Mediana	2.301
Moda	1.695
Desviación estándar	570
Rango	3.198
Mínimo	646
Máximo	3.843
Suma	123.806
Cuenta	53

En los resultados estadísticos descriptivos de los datos sin transformar (tabla 2), se aprecia una desviación estándar muy alta y muy cercana a la media, tanto así que equivalía al 54% del valor de la media, mientras que para los resultados de esta tabla la dispersión

bajo considerablemente, tanto que ahora, la desviación corresponde a un 24% del valor de la media (Tabla 4).

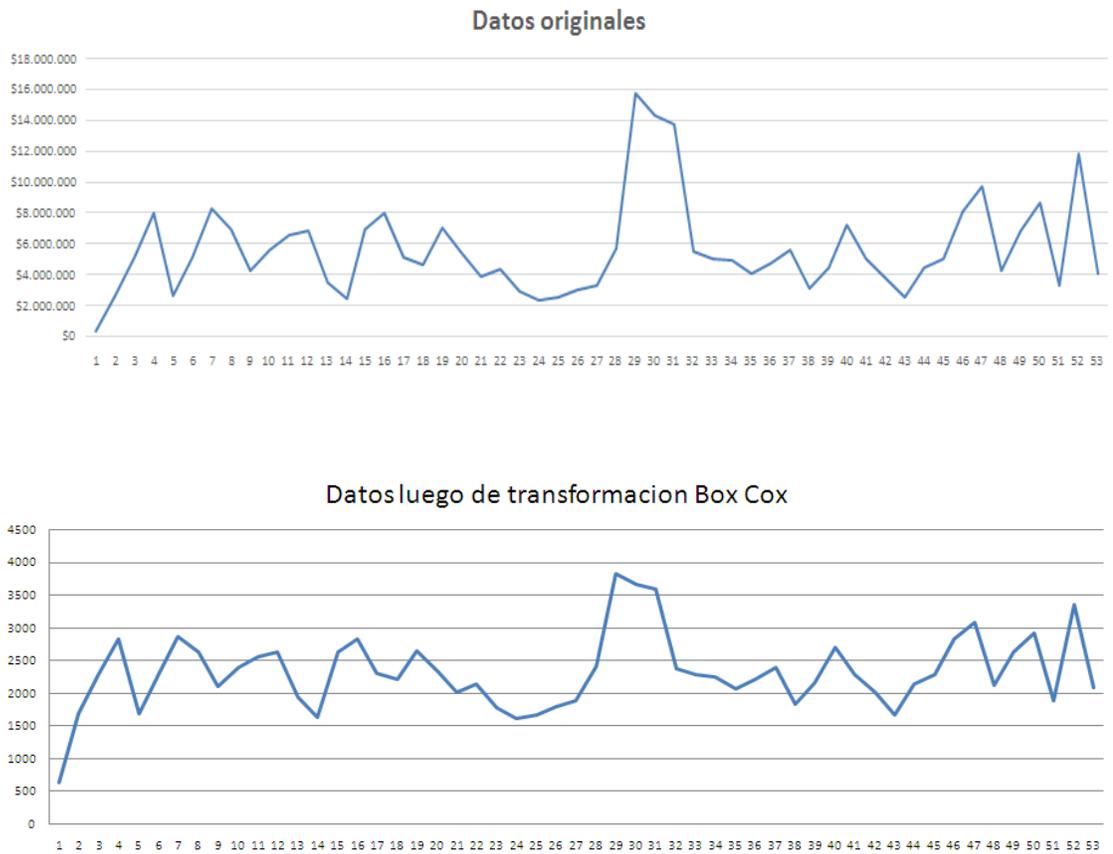


Figura 3. Comparación de comportamiento luego de transformación Box Cox Vs Datos Originales

Para facilitar la comparación, vemos el comportamiento después y antes respectivamente (Figura 3). Se puede ver una suavización en la serie, no hay picos tan pronunciados como en la serie original, la dispersión es mucho menor tanto grafica como numéricamente basándonos en los resultados descriptivos.

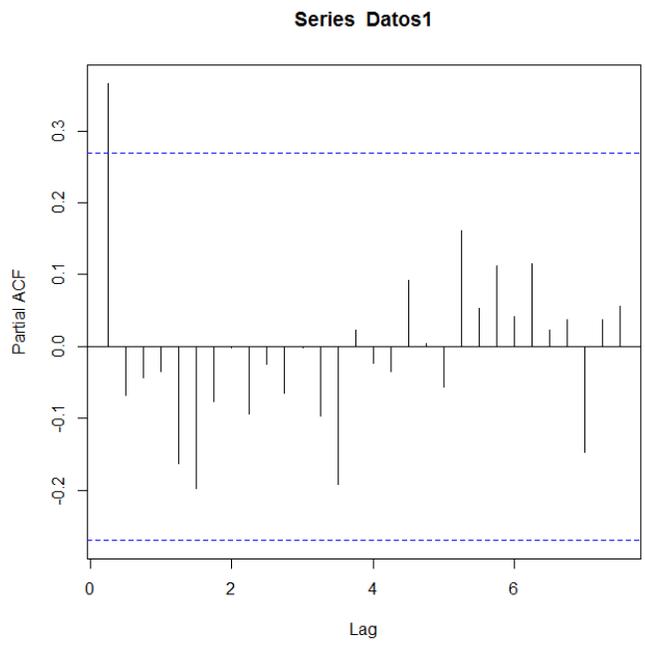
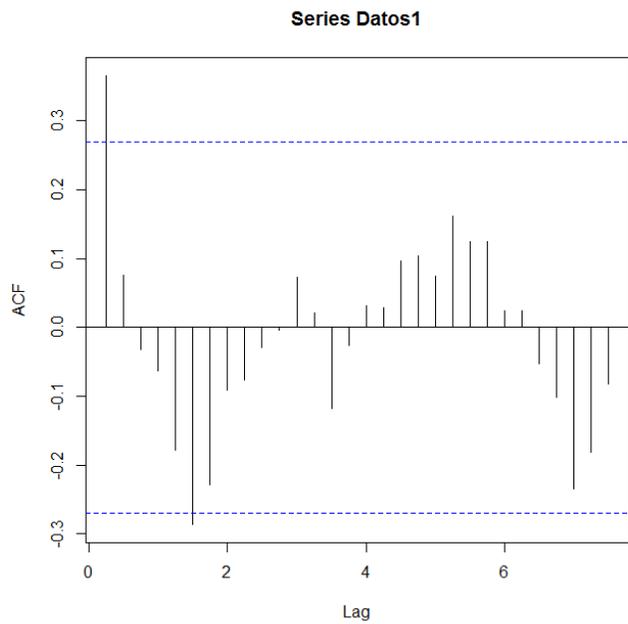


Figura 4. Correlación de residuos de la serie

Dada la figura 4 de correlación y correlación parcial, se observa que existe significancia en el primer rezago y aparentemente el modelo es estacionario, sin embargo,

para comprobar si hay estacionaridad en la serie recurrimos a hacer la prueba de Dickey-Fuller.

Las hipótesis para la prueba DickeyFuller serán:

H₀: Los datos no son estacionarios

H_a: Los datos son estacionarios

Resultado prueba:

P valor = 0.01

Con la realización de la prueba podemos ver que el p valor=0.01, menor a 0.05 se encuentra en la región de rechazo, por tanto se acepta la hipótesis alterna: Los datos de la serie son estacionarios.

Aplicación del modelo HoltWinters

Los datos transformados de la serie, son analizados por el modelo mencionado y nos muestra su comportamiento gráfico en donde la línea negra corresponde a los datos originales, la roja a los valores estimados por el modelo.

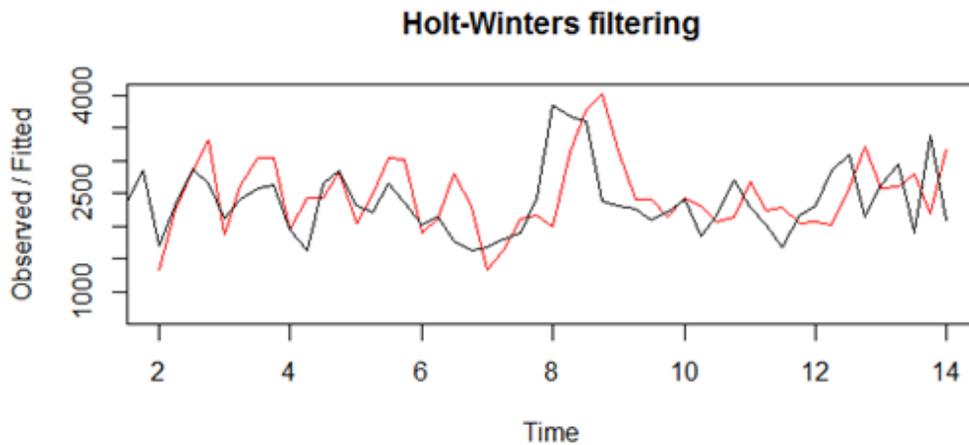


Figura 5. Modelo Aditivo

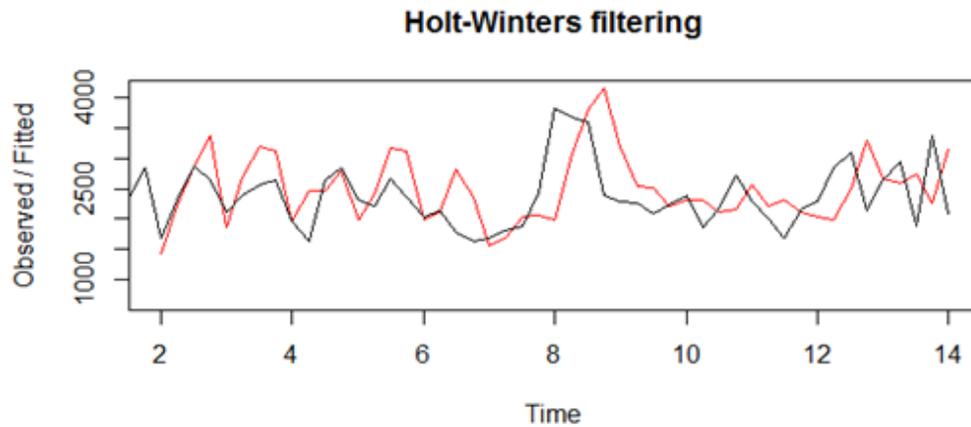


Figura 6. Modelo Multiplicativo

La estimación del SSE (Suma de los cuadrados del error). Arrojó los siguientes resultados:

Modelo aditivo = 18.300.221

Modelo multiplicativo= 19.760.767

Por lo cual se puede afirmar que nuestro modelo es aditivo.

Una vez deducido lo anterior, se analiza el comportamiento de los residuales del modelo aditivo:

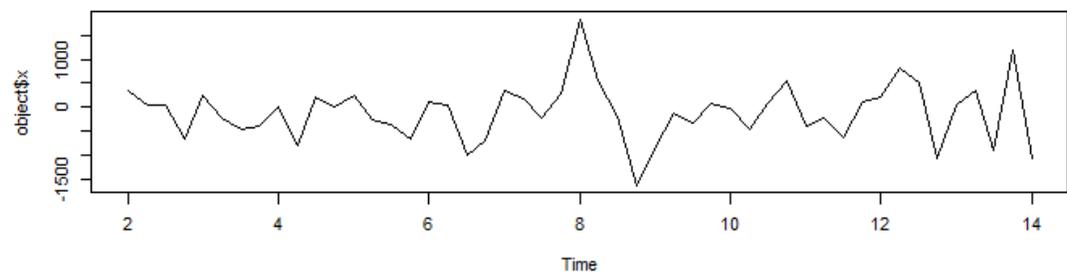


Figura 7. Comportamiento gráfico residuos serie HoltWinters

En la figura 7 se observa cierta estacionariedad de los datos, para comprobarlo numéricamente se realiza la prueba de DickeyFuller.

Las hipótesis para la prueba serán:

H₀: Los datos no son estacionarios

H_a: Los datos son estacionarios

Resultados de la prueba:

P valor = 0.01

Corroboramos así que los datos son estacionarios

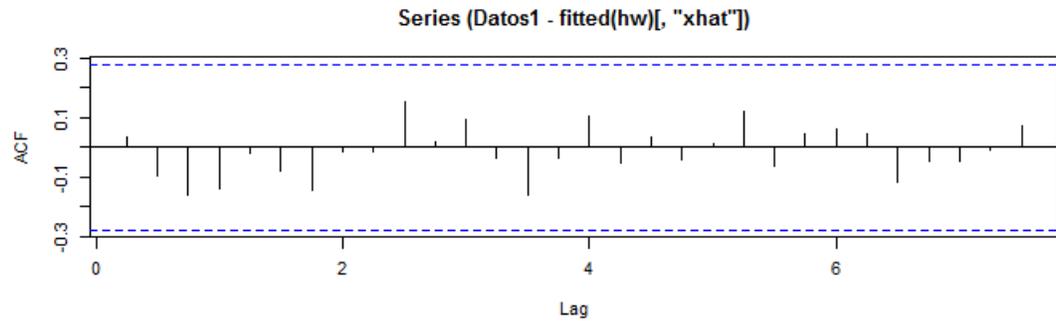


Figura 8. Resultados gráficos de los residuales del modelo HoltWinters

La figura 8 es clara no hay correlación entre los datos, sin embargo se realiza la prueba Box-Ljung.

Las hipótesis para la prueba serán:

Ho: Los datos no están correlacionados

Ha: Los datos están correlacionados

Resultados de la prueba:

P valor = 0.9647

Con base en el resultado, el cual es mayor a 0.05, podemos aceptar la hipótesis nula, o sea, los datos no están correlacionados, tal como se había afirmado.

A continuación se hace la predicción de los datos suprimiendo 8 periodos de tiempo de la serie transformada (figura) y luego prediciéndolos, los resultados (figura)

Tabla 5. Serie sin los últimos 8 periodos

1	645.654	1.694.968	2.316.208	2.836.860
2	1.694.968	2.305.952	2.880.369	2.649.696
3	2.122.243	2.401.238	2.579.119	2.641.000
4	1.948.598	1.641.529	2.649.696	2.836.860
5	2.311.087	2.221.811	2.662.676	2.361.690
6	2.028.685	2.150.467	1.789.103	1.625.866
7	1.687.460	1.809.983	1.897.248	2.430.386
8	3.843.185	3.684.910	3.608.526	2.381.564
9	2.300.803	2.264.359	2.081.943	2.227.184
10	2.401.238	1.850.884	2.167.186	2.709.621
11	2.290.463	2.022.662	1.672.321	2.161.630
12	2.300.803			

Una vez suprimidos los últimos 8 datos. Procedemos a hacer la predicción de los mismos 8 periodos que equivaldrían a 2 meses de ventas (Tabla 6)

Tabla 6. Datos observados y ajustados con modelo HoltWinters

	Observados	Ajustados
Semana 46	\$8.075.000	\$7.030.778
Semana 47	\$9.700.000	\$5.972.353
Semana 48	\$4.250.000	\$7.814.262
Semana 49	\$6.825.000	\$6.498.772
Semana 50	\$8.625.000	\$8.017.582
Semana 51	\$3.250.000	\$6.959.157
Semana 52	\$11.800.000	\$8.801.066
Semana 53	\$4.075.000	\$7.485.576

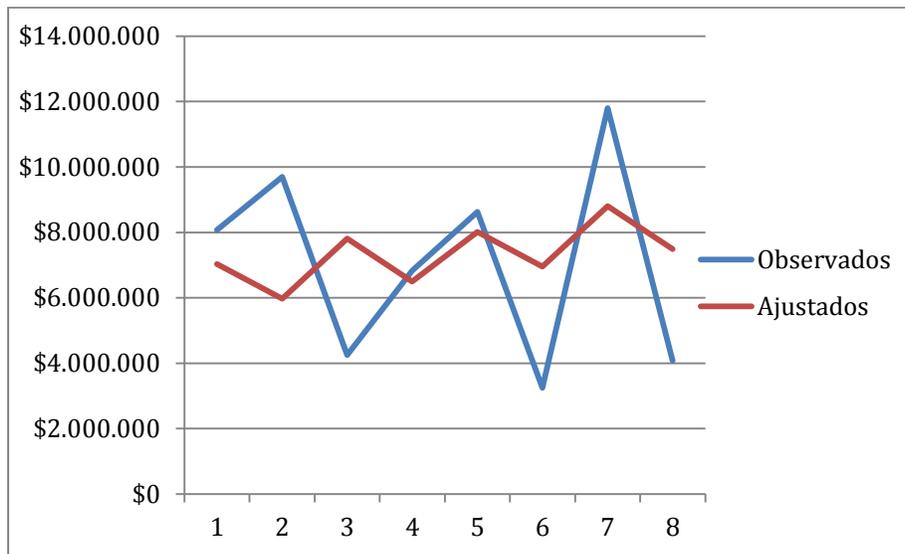


Figura 9. Comparación datos observados Vs predicción según modelo HoltWinters

Se aprecia en la figura 9, que la predicción del modelo HoltWinters, tiene un comportamiento similar al de los datos originales de la serie, aunque con datos menos dispersos.

Aplicación del modelo arma(p,q)

Se eligió el modelo ARMA (1,1) dado que los gráficos de correlación muestran claramente un modelo AR1, debido a que tiene un ACF infinito y una PACF que se anula en el segundo retardo, no es necesario dar ningún grado de diferenciación para convertir la serie ya que esta es estacionaria, el componente MA1 debido a que el ACF se anula a partir del segundo retardo, aunque se puede ver algo de significancia en el rezago 6, sin embargo al correr los modelos (1,1 y 1,6) y ver su AIC, como se muestra en la tabla vemos que el modelo (1,1) tiene el mejor resultado con base a este indicador.

Tabla 7. Comparación resultados AIC

COEFICIENTES	AIC
1,1	818.56
1,6	823.24

El AIC (criterio de información de Akaike) es una medida de la calidad relativa de un modelo estadístico para un conjunto dado de datos. Como tal, el AIC proporciona un medio para la selección del modelo.(Wikipedia, 2015)
Sin embargo se puede apreciar el comportamiento grafico del modelo en las figuras a continuación:

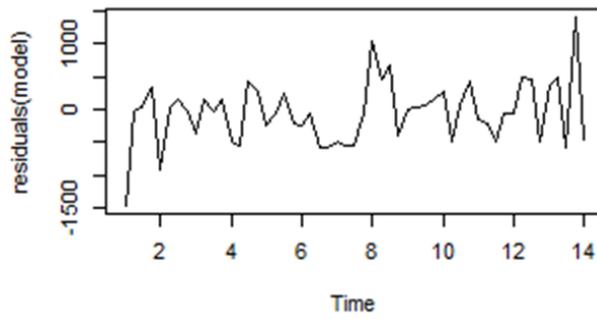


Figura 10. Comportamiento grafico residuos

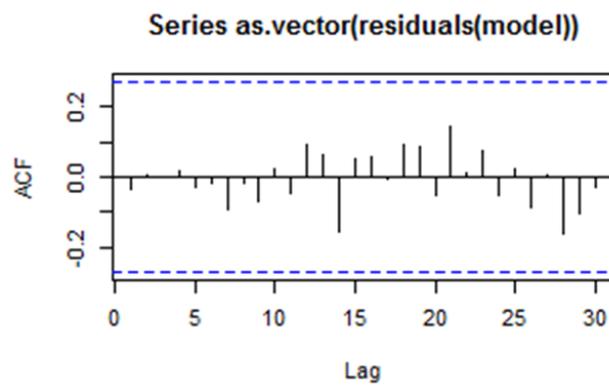


Figura 11. Correlación de residuos

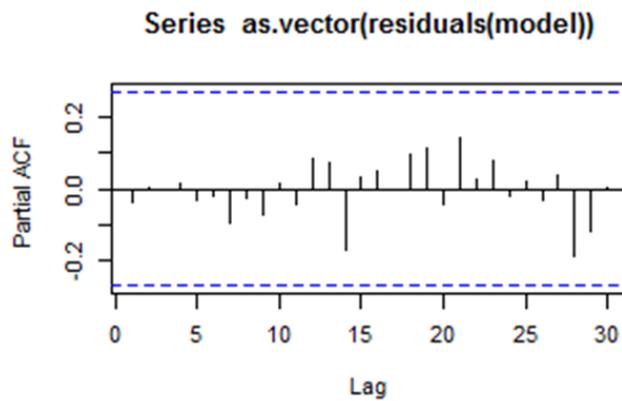


Figura 12. Correlación parcial residuos

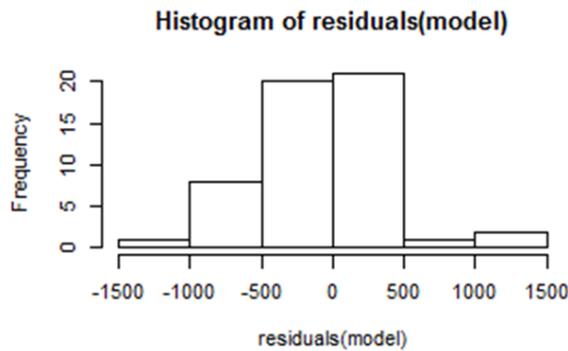


Figura 13. Histograma de distribución residuos

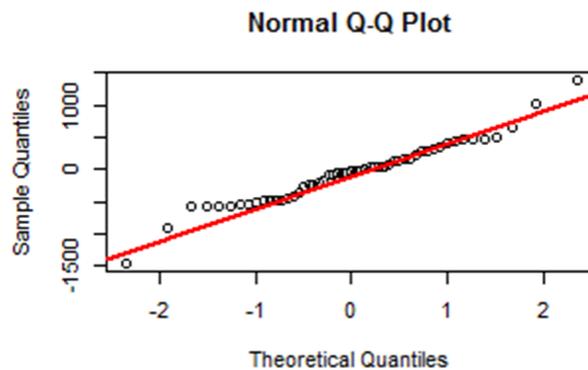


Figura 14. QQ plot residuos

En la figura10 correspondiente al comportamiento grafico de los residuos podemos ver que se mueven dentro de una franja constante, evidenciamos así la estacionaridad de la serie, para confirmar lo dicho haremos la prueba de estacionaridad de DickeyFuller:

Las hipótesis para la prueba serán:

Ho: Los datos no son estacionarios

Ha: Los datos son estacionarios

Resultado de la prueba:

P valor = 0.05

Dado este resultado se confirma lo mencionado, se acepta la hipótesis alterna ya que el valor está en el límite de aceptación, los datos son estacionarios.

En las figuras 11 y 12 de correlación ACF Y PACF se evidencia la incorrelación de los datos, dado que están dentro de los límites establecidos.

El histograma (figura 12) muestra un comportamiento que obedece a una distribución normal, y el qqplot(figura 13) muestra que los datos pueden tener comportamiento normal,

sin embargo no es lo suficientemente claro, para esto mediante la prueba shapiroWilk, realizaremos la prueba de normalidad a los residuos de la serie y confirmaremos o no lo planteado. Las hipótesis para la prueba serán:

Ho: Los datos provienen de una población con distribución normal

Ha: los datos no provienen de una población con distribución normal

Resultado de la prueba:

P valor = 0.14

Como se observa, el p valor de la prueba al ser mayor a 0.05 cae en la zona de aceptación, por lo cual podemos decir que los datos provienen de una población con distribución normal.

Dados los resultados anteriores podemos hacer la predicción de los datos, primero eliminaremos 8 datos a la serie, que correspondería en tiempo a 2 meses u 8 semanas, y posteriormente realizaremos el pronóstico (datos ajustados) correspondiente a esos 8 periodos con el modelo seleccionado (1,1), (tabla 8).

Tabla 8. Datos observados y ajustados con el modelo ARMA (1,1)

	Observados	ajustados
Semana 46	\$8.075.000	\$4.562.006
Semana 47	\$9.700.000	\$5.199.116
Semana 48	\$4.250.000	\$5.412.899
Semana 49	\$6.825.000	\$5.484.634
Semana 50	\$8.625.000	\$5.508.705
Semana 51	\$3.250.000	\$5.516.782
Semana 52	\$11.800.000	\$5.519.492
Semana 53	\$4.075.000	\$5.520.402

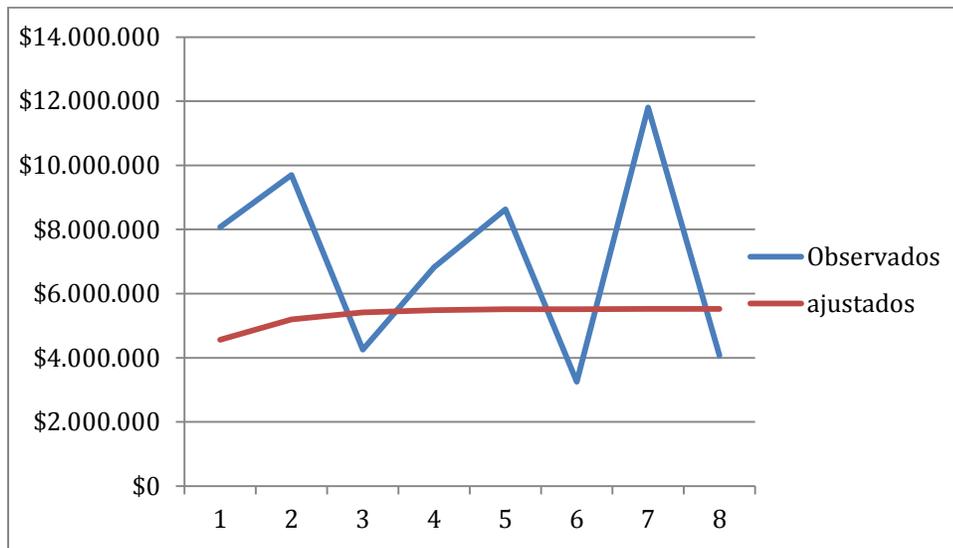


Figura 15. Comparativa datos iniciales Vs predicción hecha con modelo ARMA(1,1)

En la figura 15 se percibe que el pronóstico dado por el modelo ARMA(1,1) es muy plano, no se ajusta a los datos observados u originales de la serie.

Elección del mejor modelo

Dados los análisis realizados a nuestra serie, procedemos a definir cuál es nuestro mejor modelo. Para ello nos basamos en el indicador RMSE ó error de la raíz cuadrada de la media, y por obvias razones el modelo con el resultado más bajo será el más adecuado.

Tabla 9. Resultados raíz cuadrada de la media

Modelo HoltWinters	490.88
Modelo ARMA (1,1)	625.32

Con base en los resultados, podemos concluir que el mejor modelo de predicción para las ventas en la empresa Américas BPS en la campaña ETB es el modelo HoltWinters.

Modelo ARMAX

Con el fin de identificar dentro de las variables exógenas (independientes) cual es la que mayor impacto tiene sobre la variable (endógena) de estudio Valor ventas, se procede a nombrar cada una de ellas:

Llamadas por semana, número de ventas, comisión por venta, valor oferta semana, número de agentes, horas programadas, ingresos, ya nombrada la variable endógena y exógenas respectivamente se realizara las pruebas que lleven al mejor modelo.

En la explicación del modelo ARMA se identificó que el mejor modelo es el AR(1) MA(1), como se puede evidenciar en la siguiente figura los primeros rezagos tienen importancia.

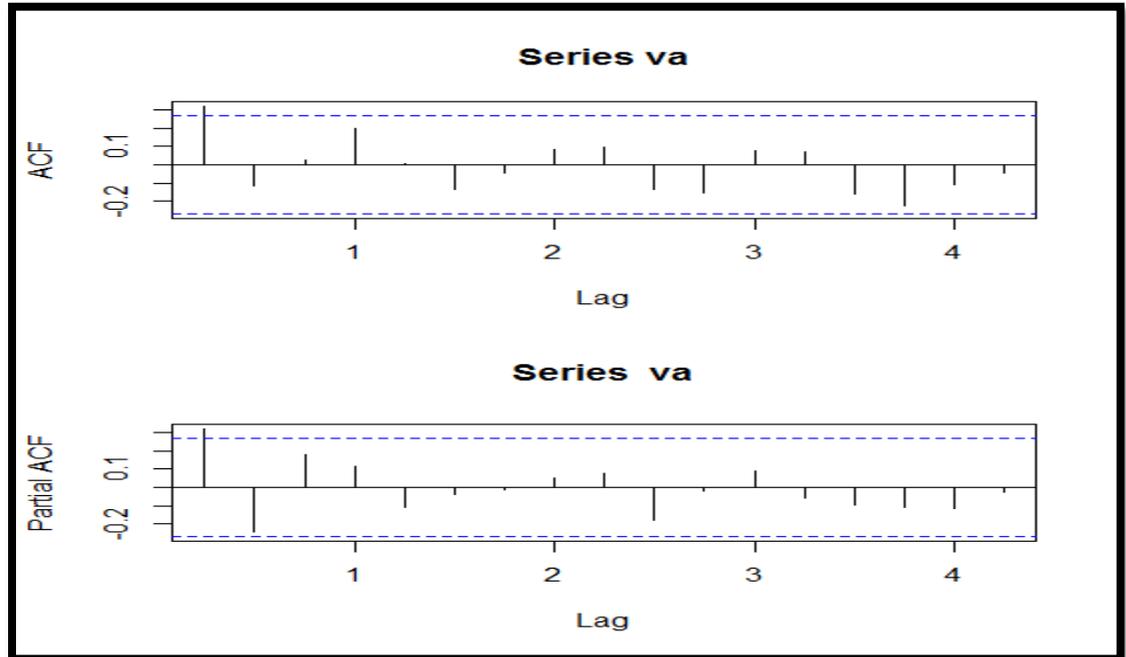


Figura 16. ACF y PACF Variable de estudio (Valor Ventas)

Al correr el modelo integrando las variables exógenas a la variable de estudio se encuentra que las más significativas son número de ventas y comisión por venta esto debido ya que ambas en términos absolutos superan el 3. Como lo muestra la siguientes tablas:

Tabla 10. Variables Exógenas

No	co	in.	ll	vo	na
-0.0031	0.4675	0.0138	0	-0.0064	-0.0251
0.0006	0.0066	0.0071	0	0.0193	0.0230
5.16	70.83	1.94	na	0.33	1.09

Tabla 11. Variables exógenas significativas

No	co
-0.0036	0.4682
0.0007	0.0061
5.14	76.75

Al identificar las variables significativas (número de ventas y comisión por venta) para la variable de estudio se realizan las pruebas estadísticas y así confirmar lo mencionado anteriormente.

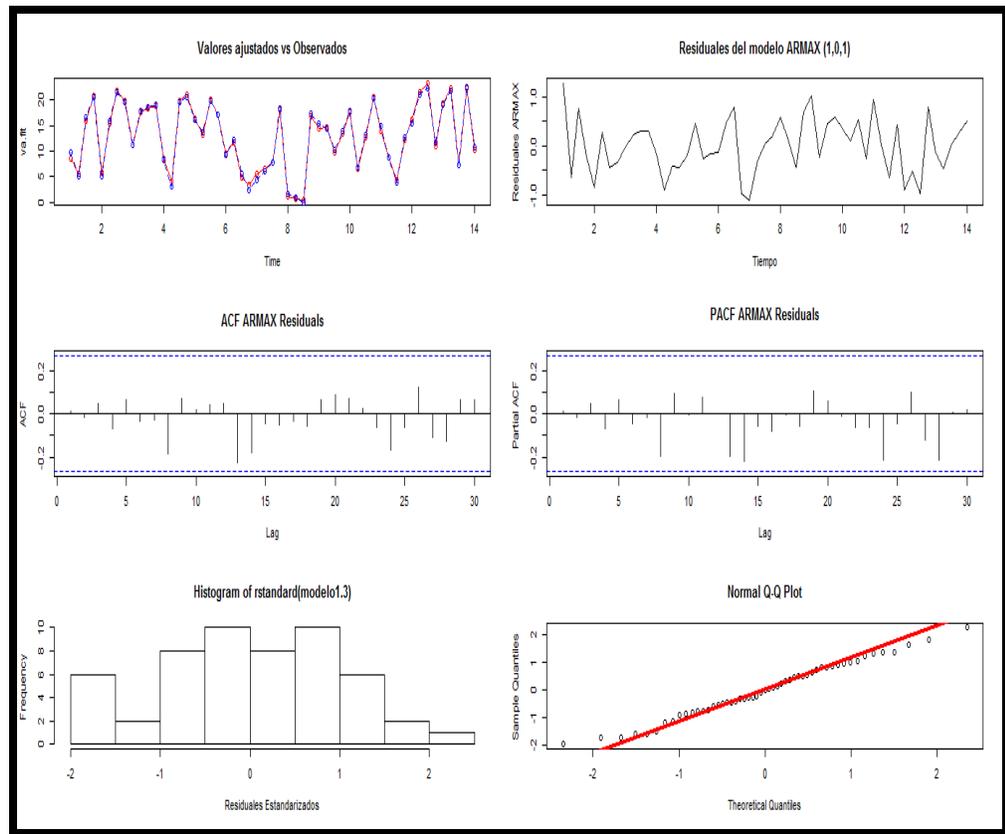


Figura 17. Prueba de estadísticos

En la figura se puede observar el comportamiento grafico de los residuos y como se encuentran dentro de una banda de confianza y constante, por lo tanto se evidencia la estacionariedad de la serie; para confirmar se realiza la prueba de estacionariedad de DickeyFuller:

Las hipótesis para la prueba serán:

H₀: Los datos no son estacionarios

H_a: Los datos son estacionarios

Resultado de la prueba:

P valor = 0.05

Dado este resultado se confirma lo mencionado, se acepta la hipótesis alterna ya que el valor está en el límite de aceptación, los datos son estacionarios.

En las figura de correlación ACF Y PACF se evidencia la incorrelación de los datos, dado que están dentro de los límites establecidos y no se encuentra datos por fuera de las bandas.

El histograma muestra un comportamiento que obedece a una distribución normal, y el qqplot muestra que los datos pueden tener comportamiento normal, para esto mediante la prueba shapiroWilk, se realizara la prueba de normalidad. Las hipótesis para la prueba serán:

Ho: Los datos provienen de una población con distribución normal

Ha: los datos no provienen de una población con distribución normal

Resultado de la prueba:

P valor = 0.76

Como se observa, el p valor de la prueba al ser mayor a 0.05 cae en la zona de aceptación, por lo cual los datos provienen de una población con distribución normal.

Con los resultados anteriores se procede a realizar la predicción de los datos, primero eliminando 8 datos a la serie, que correspondería en tiempo a 8 semanas, y posteriormente realizar el pronóstico (datos ajustados) correspondiente a esos 8 periodos con el modelo seleccionado (1,1), como se observa a continuación.

Tabla 12. Datos observados y ajustados con el modelo ARMAX 1.1

	Observado	Ajustado
Semana 46	\$8.075.000	\$2.025.273
Semana 47	\$9.700.000	\$2.898.204
Semana 48	\$4.250.000	\$2.505.344
Semana 49	\$6.825.000	\$1.711.390
Semana 50	\$8.625.000	\$3.147.632
Semana 51	\$3.250.000	\$2.666.211
Semana 52	\$11.800.000	\$2.067.432
Semana 53	\$4.075.000	\$4.070.421

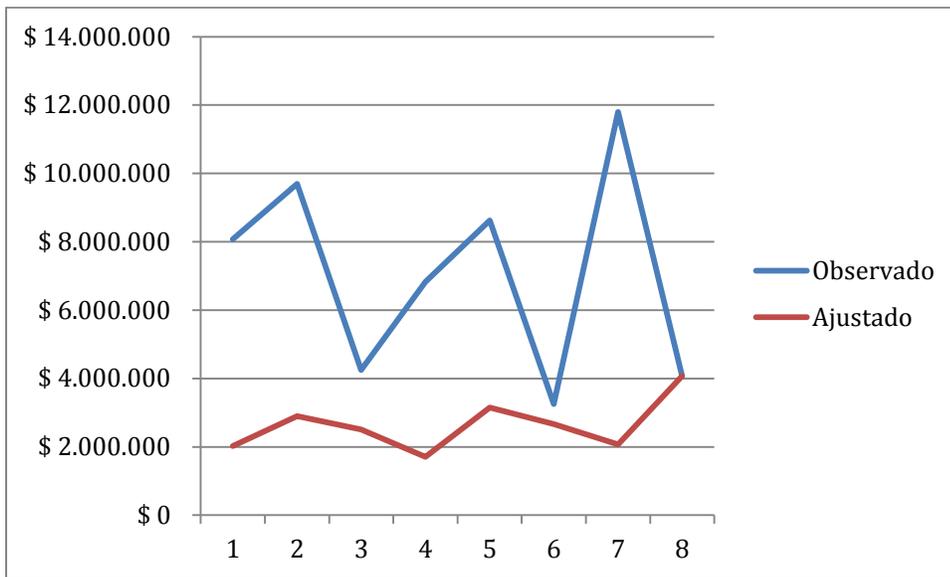


Figura 18. Comparativa datos iniciales Vs predicción hecha con modelo ARMAX(1,1)

En la figura 19 se observa que el pronóstico dado por el modelo ARMAX(1,1), no se ajusta a los datos observados u originales de la serie.

CAPITULO 6. Conclusiones y recomendaciones

El mejor modelo de pronóstico para la serie de nuestro estudio (ventas de la campaña ETB en Américas BPS), de los 3 analizados es el modelo Holt Winters, dado que su comportamiento grafico se adapta mejor al comportamiento de la serie y su error es menor en comparación al ARMA (1,1).

No todas las series de tiempo estacionarias pueden ser determinadas y predecidas por un solo tipo de modelo sin su respectivo análisis, dado que el análisis de variables es cambiante y dinámico, por esto es necesario analizar los datos con varios modelos para su respectiva comparación y así tomar la mejor decisión.

Una vez realizado el modelo ARMAX, para identificar cuáles son las variables que más influyen en la variable de estudio del presente trabajo (Valor ventas), se llega a la conclusión que son: número de ventas que ingresaron en cada semana del periodo transcurrido al 2015 y comisión por venta, ya que la misma era un incentivo para los colaboradores (agentes) a obtener un mayor ingreso.

Se puede pensar en un analisis de intervención para suavizar el pico presentado en la serie original entre la semana 29 a la 32, sin embargo, se debe ser muy cuidadoso y una vez hecho dicho analisis hay que verificar que el pronostico no se vea tan alejado del comportamiento original de la serie.

CAPITULO 7. Referencias

- 1, S. T. (2016). Series Temporales. En *Series Temporales* (págs. 68-69).
- Wikipedia. (9 de 11 de 2015). Recuperado el 28 de Mayo de 2016, de Wikipedia:
https://es.wikipedia.org/wiki/Criterio_de_informaci%C3%B3n_de_Akaike
- Alvarez, C. E. (2009). Metodología diseño y desarrollo del proceso de investigación con énfasis en ciencias empresariales. En C. E. Alvarez, *Metodología diseño y desarrollo del proceso de investigación con énfasis en ciencias empresariales* (págs. 230-231). México: Limusa.
- Américas BPS, E. (2014). *Acta de Interventoria*. Bogotá.
- BPS, A. (1 de Enero de 2015). *Américas*. Recuperado el 26 de Abril de 2016, de Américas:
<http://americasbps.com/>
- Bussines Process Service. (23 de Enero de 2016). *Americas BPS*. Recuperado el 27 de febrero de 2016, de www.americasbps.com
- Coghaln, A. (2015). A Little Book of R For Times Series. En A. Coghaln, *A Little Book of R For Times Series* (pág. 11).
- Gujarati, D. N. (2009). Econometría. En D. N. Gujarati, *Econometría* (págs. 774,775). México: McGrawHill.
- Guzmán, V. M. (2003). *Análisis estadístico de series de tiempo económicas*. Mexico: Thomson.
- Pokorny, M. (1987). *An Introduction to Econometrics*. Nueva York: Blackwell.
- Sotoca, M. J. (Marzo de 2010). <http://es.slideshare.net/mjerez/series1>. Recuperado el 28 de Mayo de 2016, de <http://es.slideshare.net/mjerez/series1>:
<http://es.slideshare.net/mjerez/series1>
- Wikipedia. (s.f.). *Wikipedia*. Recuperado el 5 de May de 2016, de Wikipedia:
https://wikipedia.org/Alisado_exponencial