LOS LIBERTADORES
FUNDACIÓN UNIVERSITARIA

Sistemas memristivos: representación físico-matemática desde la teoría de sistemas dinámicos

Oscar Rodríguez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Grupo de Física e Informática FISINFOR

Julián Salamanca
Profesor Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Grupo de Física e Informática FISINFOR, jasalamanca@udistrital.edu.co

Vladimir Ballesteros
Fundación Universitaria Los Libertadores
Grupo de Investigación en Representaciones y Conceptos Científicos IREC

Colección INVESTIGACIÓN

Sistemas memristivos: Representación físico-matemática desde la teoría de sistemas dinámicos / Oscar Rodríguez, Julián Salamanca, Vladimir Ballesteros - Bogotá: Fundación Universitaria Los Libertadores, 2018.

152 páginas: ilustraciones, gráficas; 17x24 cm (Colección Investigación)

ISBN: 978-958-5478-11-4 (impreso) | ISBN: 978-958-5478-12-1 (digital)

1. Análisis de circuitos eléctricos 2. Sistemas dinámicos diferenciales 3. Sistemas de Hamilton 4. Ecuaciones Lagrange 5. Calculo de variaciones 6. Ecuaciones diferenciales 7. Ingeniería electrónica I. Rodríguez, Oscar, autor II. Salamanca, Julián, autor III. Ballesteros, Vladimir, autor IV. Fundación Universitaria Los Libertadores.

621.38132 R696s -dc23 CRAIFULL

Primera Edición: Bogotá, diciembre de 2018

Cra. 16 No. 63A-68/ Tel. 2544750.
www.ulibertadores.edu.co

Juan Manuel Linares Venegas
Presidente del Claustro

María Angélica Cortés Montejo
Vicerrectora General

Luis Ignacio Aguilar Zambrano
Vicerrector de Investigación

Julián Salamanca
Diagramación

Xpress. Estudio gráfico y digital
Impresión

Diego A. Martínez Cárdenas
Coordinador Editorial

Los autores declaran que esta investigación fue financiada por la Fundación Universitaria Los Libertadores en el marco de la Convocatoria de Investigaciones internas de la institución.

Escrito en LaTeX.

Contenido

Prólogo **9**

Introducción **11**

1. Los sistemas dinámicos y la teoría de circuitos **15**
1.1. Sistemas dinámicos 15
1.1.1. Variables de estado y ecuaciones de movimiento 16
1.1.2. Clasificación de los sistemas dinámicos 16
1.1.3. Diagramas de fases 17
1.1.4. Puntos de equilibrio y estabilidad 18
1.2. Teoría de circuitos 18
1.2.1. El resistor 20
1.2.2. El capacitor 21
1.2.3. El inductor 21
1.2.4. Elementos activos y pasivos 22
1.2.5. Leyes de Kirchhoff 22
1.2.6. Circuitos dinámicos y formulación de estado 24

2. El memristor y los sistemas memristivos **27**
2.1. El cuarto elemento básico 27
2.1.1. Memristancia y Memductancia 27
2.1.2. Propiedades 29
2.1.3. Interpretación electromagnética del memristor 30
2.2. Los sistemas memristivos 32
2.2.1. Propiedades 34
2.2.2. Sistema memristivo con corriente continua 34
2.2.3. La curva de histéresis 35
2.3. El modelo de Hewlett-Packard 41
2.3.1. Modelo lineal 41

2.3.2. Modelo no lineal y funciones ventana 47

3. Circuitos con elementos memristivos 51
3.1. Comportamiento regular 51
3.1.1. Memristores en serie 51
3.1.2. Varios Memristores en serie 53
3.1.3. Circuito MR 55
3.1.4. Circuito MC y ML 55
3.1.5. Circuito MLC 59
3.2. Comportamiento caótico 63
3.2.1. Caos en circuitos con elementos memristivos 63
3.2.2. Ejemplos 64

4. Sistemas memristivos: formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano 73
4.1. Formalismo Lagrangiano 73
4.1.1. Energía y co-energía eléctrica 74
4.1.2. Energía y co-energía magnética 74
4.1.3. Elementos disipativos: contenido y co-contenido 74
4.2. Sistemas memristivos dentro del formalismo Lagrangiano 76
4.2.1. Ejemplos 78
4.2.2. Acción y co-acción 80
4.2.3. Formalismo Hamiltoniano 81
4.2.4. Ejemplos 83
4.2.5. Sistemas Hamiltonianos con puertos 86
4.2.6. El Hamiltoniano nulo 87
4.2.7. Ejemplos 88

5. Problemas del memristor y el modelo lineal 91
5.1. ¿Es un elemento dinámico? 92
5.2. ¿Es el cuarto elemento? 92
5.3. Los sistemas memristivos son resistores 94
5.4. ¿ Es la curva de histéresis suficiente? 95
5.5. ¿Puede el memristor utilizarse como memoria? 97
5.6. Problemas en la derivación del modelo lineal 98
5.6.1. Propiedad de memoria 99

6. Síntesis, resultados y Conclusiones 101
Referencias 108

Apéndice A **113**
6.1. Unidades utilizadas en el modelo lineal 113

Apéndice B **115**
6.2. Función de Strukov, et. al 115
6.3. Función de Joglekar y Wolf 116
6.4. Función de Biolek, et al 116
6.5. Función de Prodromakis, et al 118

Apéndice C **121**
6.6. Relación flujo-carga (Figura 2.6(a)) 121
6.7. Carga en función del tiempo (Figura 2.6(c)) 122
6.8. Función seno y coseno (Figura 2.4(a)) 123
6.9. Dependencia con la frecuencia (Figura 2.4(b)) 123
6.10. Curva de histéresis (Figura 2.6(d)) 124
6.11. Efecto de la función ventana Strukov 125
6.12. Función ventana de Joglekar 127
6.13. Función ventana de Biolek 127
6.14. Función ventana de Prodromakis 128
6.15. Función de Prodromakis parámetro J 129
6.16. Circuito MC 130
6.17. Circuito MC con función ventana 131
6.18. Circuito ML 132

Apéndice D **135**
6.19. Formulación de ecuaciones de estado 135
6.20. Ecuaciones con LVK y LCK explícitamente 137
6.21. Adición de elementos disipativos: contenido y co-contenido . . . 138
6.22. Ejemplo 139

Apéndice E **143**
6.23. Ecuaciones de los sistemas Hamiltonianos con puertos 143
6.24. Puertos y estructura de Dirac 145
6.25. Memristor en el dominio mecánico 145

Prólogo

El desarrollo sostenible del planeta se ve relegado hoy día en la producción de conocimiento de la ciencia y el desarrollo de la tecnología con responsabilidad social. Precisamente, la rotunda importancia del conocimiento científico como parte inseparable del universo, se ve refleja en la creciente producción documental de temas cada vez mas específicos. La formación de investigadores con documentos que recopilan cierta información relevante para el estudio de un área en especial constituye un gran aporte que da aviso sobre la necesidad de especializar el estudio, haciendo constante y coherente lo que los grupos de investigación alrededor del mundo proponen como lineas de investigación. No obstante, cabe aclarar que el asiento de la ciencia no es por la tecnología, sino por esa necesidad intrínseca del ser humano por escudriñar este universo; a esto le llamamos "curiosidad".

En esta oportunidad, como parte del trabajo de las lineas de investigación en *Modelamiento, Minería, Simulación y Análisis de Datos*, y, de *Alfabetización Científica y Tecnológica* del grupo de Física e Informática de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (FISINFOR, Bogotá-Colombia) sobre el tema de memristores, en asocio con el grupo de Investigación en Representaciones y Conceptos Científicos de la Fundación Universitaria Los Libertadores (IREC, Bogotá-Colombia), se presenta una investigación básica y documental que tuvo por objeto recopilar y estudiar las propiedades del memristor y de los sistemas memristivos con el fin de establecer sus estructuras físico-matemáticas y determinar si estos elementos corresponden a los sistemas dinámicos.

La presentación de este producto de investigación obedece a un diseño metodológico en cuanto al estilo de escritura y diagramación de los contenidos, pensado para una población de profesores e investigadores en formación inicial en el área de física, ingeniería electrónica, ingeniería de software o en formación pos-gradual en física, ingeniería electrónica o ingeniería de software, interesados en el área de los memristores. Adicional a esto, el texto se encuentra estructurado con la base fundamental del porqué se abre la investigación en memristores, considerados como resistencias con memoria, para así partir al desarrollo del tema particular de establecer la estructura físico-matemática enmarcada en la teoría de sistemas dinámicos.

Como consecuencia, este documento pretende establecerse como texto de referencia para aquellos investigadores que ya poseen alguna experiencia en la investigación de memristores.

Con el objeto de seguir un hilo conductor en el texto, se deja al lector anexos sobre los detalles físico-matemáticos de algunos temas y desarrollos, haciendo que el escrito sea coherente y consistente con los conocimientos básicos de la población objeto en las áreas que fundamentan los principios físicos de los memristores y sistemas dinámicos al nivel de la física clásica.

Las tablas, figuras y esquemas que son presentadas en el texto, se corresponden a la posición de los autores vistos como lectores y pensando en las necesidades de los investigadores que comienzan en el tema de memristores (y los que ya tiene alguna experiencia), para así conciliar un dialogo con el documento que consienta al lector en reducir su propia curva de aprendizaje y aportar al desarrollo sostenible de investigaciones sobre el tema de los memristores de nanoestructuras, dado que con este texto estructurado de la manera descrita, se pretende reducir los tiempos de producción de nuevo conocimiento, so pena que la búsqueda de información, la recopilación y su posible aprendizaje requieren de tiempos largos que son asumidos por los rubros asignados a la investigación.

"*Ser una persona letrada en ciencia y tecnología implica mucho más que ser capaz de leer, entender y escribir acerca de ciencia y tecnología; incluye la habilidad de aplicar conceptos científicos y usar herramientas tecnológicas en la resolución de problemas y la toma de decisiones en su quehacer diario e implica la aplicación de conceptos científicos más allá de las exigencias de la evaluación curricular*" Organización de Naciones Unidas (UNESCO).

Introducción

El año 2008 marcó el resurgimiento de un elemento olvidado: el memristor. Predicho por Leon Chua en el año 1971 como el cuarto elemento fundamental en los circuitos eléctricos, permaneció como un elemento teórico durante más de 40 años, hasta que científicos de los laboratorios de Hewlett-Packard publicaron un artículo en el que afirmaban haber encontrado un memristor físico.

A partir de este hecho, la popularidad de este elemento aumentó considerablemente, no solo en el ámbito científico, sino en el publico en general. Dicha popularidad no solo se centro en este elemento, sino que también se extendió a la familia a la que éste pertenece: los sistemas memristivos, es decir, a partir de este punto se empezó a hablar también de sistemas memristivos, los cuales fueron definidos por L. Chua y S. Kang (L. O. Chua y Kang, 1976) como una nueva clase de sistemas dinámicos.

El creciente interés en el memristor y los sistemas memristivos se debe a las propiedades únicas que poseen estos sistemas, así como el comportamiento dinámico que exhiben los circuitos que los incluyen. La propiedad más importante de los sistemas memristivos es la capacidad de almacenar información, es decir, tienen memoria (de ahí el nombre de memristor = memory resistor). Gracias a esta propiedad, las posibles aplicaciones tecnológicas de este elemento son variadas. Entre estas se encuentran: uso como memorias no volátiles con un bajo consumo energético (ReRAM) (Huang, Ho, y Li, 2010), computación analógica y digital, y cifrado de información (Lin y Wang, 2009). El desarrollo de esta tecnología puede mantener el ritmo de crecimiento en la capacidad de procesamiento (el cual se duplica cada 18 meses); debido a la miniaturización de los dispositivos actuales, este ritmo de crecimiento solo puede mantenerse por una década o menos (Tour y He, 2008).

Por otro lado no solo existe un interés práctico sino también teórico en el estudio de estos elementos. Su implementación en circuitos eléctricos ha permitido aplicaciones en el campo de la biología, por ejemplo, circuitos que emulan sinapsis (Ahmed et al., 2018), o modelos que describen el comportamiento adaptativo de organismos unicelulares e imitan algunas funciones en redes neuronales (Di Ventra y Pershin, 2012). Este último abre la posibilidad de comprender y simular las funciones del cerebro humano.

El estado del arte sobre los sistemas memristivos se centra en tres puntos principales. En primer lugar existe la búsqueda del origen físico de la memristancia. Por otro lado existe el interés en las diversas aplicaciones y, finalmente, el desarrollo de una teoría que permita la descripción de los circuitos que contengan estos elementos. Es en este último punto en el que se centra el estudio documental desarrollado en este proyecto.

La descripción de los circuitos con elementos memristivos ha sido abordada desde dos perspectivas diferentes: La teoría de circuitos, a partir de las leyes de Kirchhoff y la mecánica analítica aplicada a los circuitos eléctricos, mediante las ecuaciones de Lagrange y Hamilton. Dentro de estos modelos, los sistemas memristivos son incluidos y modelados como sistemas dinámicos; sin embargo, es bien sabido que los resistores son elementos algebraicos, esto es, estáticos. Cabe preguntarse entonces, ¿qué características físicas y matemáticas permiten modelar los sistemas memristivos como sistemas dinámicos?.

Con el fin de responder este interrogante, el documento fue dividido en cinco partes. En la primera parte se exploraron brevemente los sistemas dinámicos y la teoría de circuitos, con base en la información encontrada en la literatura consultada. En esta sección se revisaron los conceptos de sistema dinámico, variables de estado y ecuaciones de movimiento. De igual manera, se abordó la teoría de circuitos y los elementos básicos de circuito, a saber, el resistor, el inductor y el capacitor, prestando atención a los fenómenos físicos que los caracterizan. Ya que el memristor fue postulado como el cuarto elemento básico, fue necesario aclarar qué se entiende por elemento de circuito y por elemento básico. Finalmente, en esta sección se muestra la conexión entre los sistemas dinámicos y los circuitos eléctricos.

En la segunda parte se definieron el memristor y los sistemas memristivos, de acuerdo con los primeros artículos de Chua ((L. Chua, 1971) y (L. O. Chua y Kang, 1976)). Asimismo, se revisaron las principales características de estos elementos. En el artículo original del memristor, Chua trata de demostrar la posible existencia de este elemento a partir de la teoría electromagnética. Este desarrollo se muestra en esta sección. Una de las principales características de los sistemas memristivos es la curva de histéresis. En esta parte se explicó en qué consiste esta curva y sus principales características.

Debido a que gracias a la afirmación de Hewlett-Packard el memristor y los sistemas memristivos tomaron vida nuevamente, al final de esta parte se revisa el modelo propuesto por estos investigadores. Se realizaron los correspondientes cálculos para obtener las ecuaciones reportadas en (Strukov, Snider, Stewart, y Williams, 2008) y algunas de las curvas fueron reproducidas. Los códigos utilizados (que hacen parte del trabajo desarrollado por los autores de este documento) se encuentran en el apéndice 6.5.

Con estos elementos fue posible estudiar el comportamiento de circuitos que incluyen sistemas memristivos. Así pues, en la tercera parte se estudiaron circuitos conformados por estos elementos, junto con resistores, capacitores e inductores. El comportamiento de estos circuitos puede ir desde lo no lineal, llegando incluso hasta el comportamiento caótico, por lo tanto, esta parte se dividió en dos secciones, el estudio de circuitos con comportamiento regular y aquellos que evidencian la existencia de caos. En los primeros, se realizaron los correspondientes desarrollos estableciendo el paralelo con los resistores. En los segundos, se buscaron varios ejemplos de circuitos caóticos y se estableció bajo qué condiciones puede presentarse este fenómeno.

En la cuarta parte se muestra cómo son incluidos el memristor y los sistemas memristivos dentro del formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano aplicado a la descripción de los circuitos eléctricos. Trabajar los circuitos eléctricos desde estos formalismos presenta varias ventajas, por este motivo es importante conocer cómo incluir estos elementos.

Finalmente en la quinta parte se analizaron los problemas del memristor y del modelo de Hewlett-Packard a la luz de modelos más realistas de los fenómenos físicos que dan lugar a la memristancia.

El memristor es llamado en la literatura "el cuarto elemento básico de circuito". Con el avance realizado por Hewlett-Packard y sus prometedoras aplicaciones, este elemento adquirió una gran fama[1]. De igual manera, los sistemas memristivos fueron adquiriendo mayor notoriedad como una nueva clase de sistemas dinámicos; sin embargo, no son claros los argumentos que permiten designar al memristor y los sistemas memristivos de esta manera. Así pues, este trabajo busca esclarecer las características que permiten tal designación y si esta es adecuada.

En la literatura sobre el memristor y los sistemas memristivos existe una gran cantidad de artículos que muestran de manera positiva el memristor y los sistemas memristivos. Son realmente pocos los artículos que cuestionan estos elementos y el modelo de Hewlett-Packard (por lo menos hasta la fecha de terminación de este documento). Por lo que este trabajo no solo estudia las características de estos elementos y su comportamiento en circuitos eléctricos, sino que también reúne los distintos argumentos que los cuestionan.

Si bien es cierto que la mecánica cuántica juega un papel importante en el

[1]En la lista de las mejores invenciones del año 2008, el memristor ocupo el lugar número trece `http://content.time.com/time/specials/packages/article/0,28804,1852747_1854195_1854131,00.html`

mecanismo físico que da origen a la memristancia en algunos de estos sistemas, este trabajo se desarrolla únicamente en el modelo de la física clásica.

Capítulo 1

Los sistemas dinámicos y la teoría de circuitos

1.1. Sistemas dinámicos

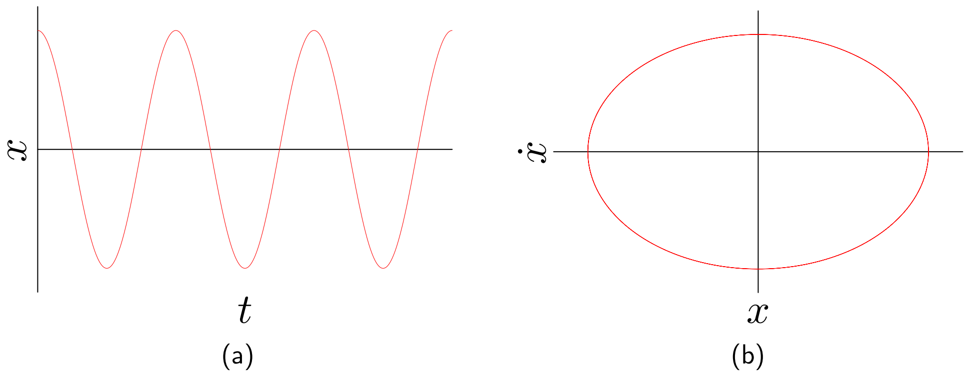


Figura 1.1: (a) Gráfica de posición en función del tiempo para un oscilador armónico (b) Diagrama de fases correspondiente. Las variables de estado son en este caso la posición x y la velocidad $\dot{x}$.

La dinámica, como parte fundamental de la física, estudia el movimiento y las causas que lo producen. Su teoría se desarrolla a partir del estudio de los sistemas mecánicos. Estos sistemas pueden ser tratados desde tres perspectivas (A. Rañada, 1990):

1. Desde el punto de vista de las fuerzas y las leyes de Newton en su forma original

2. A partir de principios variacionales, que permiten establecer las ecuaciones de Euler-Lagrange y de Hamilton

3. Desde la teoría general de los sistemas dinámicos, que tiene sus orígenes en los trabajos de Poincaré y Lyapunov

Esta última, generaliza el concepto de sistema dinámico para abarcar sistemas distintos a los mecánicos. Así pues, se considera como sistema:

Cualquier conjunto de objetos materiales o conceptuales, físicos o biológicos, etc. cuyo estado se caracterice por un conjunto de variables, entre las que existan relaciones matemáticas, denominadas leyes o ecuaciones de movimiento (A. Rañada, 1990).

1.1.1. Variables de estado y ecuaciones de movimiento

Como se mencionó, un sistema está descrito por un conjunto de n variables dependientes. Estas variables especifican el estado del sistema en cualquier instante de tiempo y por este motivo son llamadas variables de estado

$$\mathrm{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), ..., x_n(t)\}. \tag{1.1}$$

Por otro lado, no basta con conocer el valor de las variables de estado, es necesario también conocer como cambian estas con el tiempo. Esto se expresa mediante las ecuaciones de movimiento, escritas en términos de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\mathrm{x}(t), t), \tag{1.2}$$

siendo $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{f}(\mathrm{x}(t), t)$ vectores columna. El vector $\boldsymbol{x}$ contiene a las n variables de estado como entradas, mientras que el vector $\boldsymbol{f}(\mathrm{x}(t), t)$ contiene n funciones que, en general, dependen del conjunto de variables de estado y del tiempo.

1.1.2. Clasificación de los sistemas dinámicos

Dependiendo de la forma y las variables involucradas en las ecuaciones de movimiento (1.2), los sistemas dinámicos se pueden clasificar tal como lo indica Campos y Isaza (2002):

Sistemas clásicos y cuánticos

Se habla de un sistema cuántico cuando sus ecuaciones de movimiento involucran la constante de Planck $\hbar$. En caso contrario se dice que el sistema es clásico. Se debe resaltar que existen apuestas a la concepción de memristor a nivel cuántico (Pfeiffer, Egusquiza, Di Ventra, Sanz, y Solano, 2016), desarrollos de memristores haciendo uso de puntos cuánticos (Y. Li et al., 2017) como propuestas de implementación de memristores cuánticos en sistemas fotónicos (Sanz, Lamata, y Solano, 2017).

Sistemas lineales y no lineales

Un sistema dinámico es lineal si las n funciones contenidas en el vector $\boldsymbol{f}(\mathrm{x}(t), t)$ son lineales. Si las funciones son no lineales, se dice que el sistema es no lineal

Sistemas autónomos y no autónomos

Si alguna de las n funciones depende explícitamente del tiempo, el sistema es no autónomo. En otro caso, el sistema es autónomo. En estos últimos, la dependencia con el tiempo se expresa implícitamente en las variables de estado

Sistemas conservativos y disipativos

Un sistema es conservativo si posee constantes de movimiento, es decir, funciones de las variables de estado y sus derivadas que no varíen con el tiempo. En el caso de los sistemas mecánicos, si la energía es una constante el sistema es conservativo; en caso contrario, el sistema es disipativo

1.1.3. Diagramas de fases

En el estudio del movimiento se utilizan habitualmente las gráficas de las variables de estado en función del tiempo para facilitar la descripción del comportamiento del sistema. Existe otra alternativa para graficar la evolución temporal del sistema: el diagrama de fases.

Para obtener el diagrama de fases de un sistema dinámico, en lugar graficar con respecto al tiempo, se designa cada uno de los ejes como una variable de estado y se asume implícitamente la dependencia temporal. El sistema coordenado definido de esta manera recibe el nombre de espacio de fase. El espacio de fases de un sistema dinámico con n variables de estado, es el espacio formado por n ejes coordenados ortogonales entre ellos. Cada estado del sistema es representado como un punto en el espacio de fases y su evolución temporal genera una trayectoria en este espacio. Como ejemplo, en la Figura 1.1 se muestra la gráfica de posición vs. tiempo, para un oscilador armónico unidimensional y su respectivo diagrama de fases.

La ventaja del diagrama de fases es que permite un análisis cualitativo más profundo de la dinámica del sistema y es especialmente útil en el caso de sistemas no lineales. En el estudio cualitativo de un sistema dinámico, conceptos como los puntos de equilibrio y la estabilidad juegan un papel principal.

1.1.4. Puntos de equilibrio y estabilidad

Un punto de equilibrio es un estado del sistema $\bar{\boldsymbol{x}}$ para el que se cumple

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{x}}}{dt} = \boldsymbol{f}(\bar{\mathrm{x}}) = 0. \tag{1.3}$$

Esto quiere decir que si el sistema está en un punto de equilibrio, el sistema permanecerá en este estado indefinidamente.

Dependiendo del comportamiento del sistema en cercanías a un punto de equilibrio, se pueden clasificar estos puntos de acuerdo a su estabilidad:

- Un punto de equilibrio es estable si para cualquier estado inicial $\boldsymbol{x}_0$ cercano a $\bar{\boldsymbol{x}}$, el sistema permanece en este mismo estado al aumentar el tiempo
- Es asintóticamente estable si para cualquier estado inicial $\boldsymbol{x}_0$ cercano a $\bar{\boldsymbol{x}}$, el sistema tiende al punto de equilibrio al aumentar el tiempo
- por el contrario, es inestable si para cualquier estado inicial $\boldsymbol{x}_0$ cercano a $\bar{\boldsymbol{x}}$, el sistema tiende a alejarse del punto de equilibrio al aumentar el tiempo

La Figura 1.2 ejemplifica los tres tipos de estabilidad. Es importante resaltar que un punto de equilibrio no necesariamente es un punto, es decir, puede ser una curva en un plano, en el espacio, etc. Cuando un punto de equilibrio es asintóticamente estable, recibe el nombre de atractor ya que las trayectorias cercanas a este punto colapsan en él.

1.2. Teoría de circuitos

Los circuitos eléctricos se encuentran en prácticamente toda la tecnología actual. Pueden ser de distintas dimensiones físicas; desde grandes redes, que permiten la comunicación entre personas de regiones muy alejadas, hasta circuitos diminutos, como los circuitos integrados encontrados en los computadores, celulares, etc. El objetivo de la teoría de circuitos es predecir y explicar el comportamiento eléctrico de estos circuitos.

Para describir un circuito eléctrico, que es la interconexión de varios dispositivos físicos, es necesario modelar el comportamiento eléctrico de cada

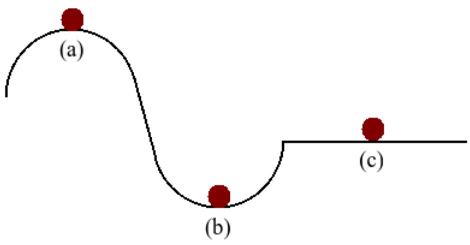


Figura 1.2: Tipos de estabilidad (a) inestable (b) asintóticamente estable (c) estable.

elemento que lo compone. Para diferenciar el dispositivo físico del modelo matemático que lo describe, este último recibe el nombre de elemento de circuito.

Existen tres atributos principales que posee un circuito eléctrico: la resistencia, la capacitancia y la inductancia. A su vez existen tres elementos de circuito para modelar cada atributo: el resistor, el capacitor y el inductor. Estos elementos pueden ser lineales o no lineales, autónomos o no autónomos, de dos o varias terminales; sin embargo, los más ampliamente conocidos son los *elementos básicos de circuito*. Estos son el resistor lineal, el capacitor lineal y el inductor lineal.

Se dice que estos elementos son *básicos* porque (Vongehr, 2012):

- poseen solo dos terminales
- son pasivos
- el atributo que cada elemento representa es independiente de los demás. Esto implica que no es posible obtener, por ejemplo, una inductancia solamente con capacitores y resistores. Puede considerarse cada atributo como los ejes de un sistema coordenado, como se muestra en la Figura 1.3(b). Evidentemente ningún vector en la dirección de un solo eje, puede ser expresado como la suma de vectores en las direcciones restantes

De acuerdo con la teoría de circuitos cada elemento de circuito está caracterizado por una relación entre dos de las cuatro variables fundamentales. Estas son la carga eléctrica q, el voltaje V, la corriente eléctrica i y el flujo magnético ϕ. A continuación se definen cada uno de los elementos básicos de circuito.

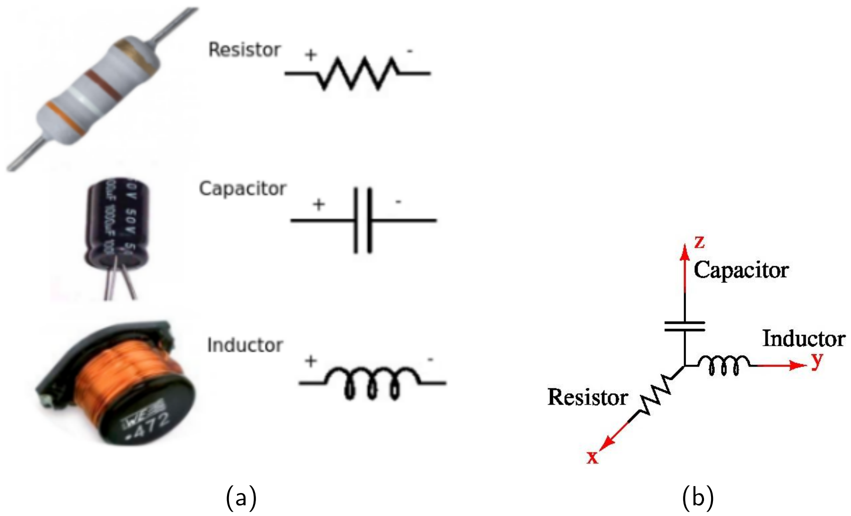


Figura 1.3: (a) diferentes dispositivos y sus elementos de circuito correspondientes (b) Cada eje del sistema coordenado puede ser interpretado como la resistencia, la capacitancia y la inductancia.

1.2.1. El resistor

La ley de Ohm establece que cuando un material es sometido a un campo eléctrico se genera en este una densidad de corriente

$$\boldsymbol{E} = \sigma \boldsymbol{J}, \tag{1.4}$$

en donde σ es la conductividad del material. Esta relación es ampliamente conocida en términos de la corriente y el voltaje

$$V(t) = Ri(t), \tag{1.5}$$

que describe el comportamiento de un resistor lineal. La constante R recibe el nombre de resistencia. A partir de esta relación se puede definir el resistor incluyendo elementos no lineales. Así pues:

Definición. *Un resistor es cualquier elemento de circuito descrito por una relación entre la corriente eléctrica y el voltaje (L. Chua, Desoer, y Kun, 1987, p. 46)*

$$\hat{R}(i, V) = 0. \tag{1.6}$$

Si la función que describe al elemento es una función monovaluada del voltaje $i = \hat{i}(V)$, se dice que es controlado por voltaje. Si por el contrario, es una función monovaluada de la corriente, $V = \hat{V}(i)$ se dice que es controlado por corriente. En el caso en que estas funciones sean invertibles se dice que el elemento es bilateral.

1.2.2. El capacitor

La magnitud del campo eléctrico es proporcional a la carga eléctrica que produce dicho campo. En el caso de un capacitor de placas paralelas, esta relación es expresada en términos del voltaje

$$V(t) = \frac{q(t)}{C}. \tag{1.7}$$

en donde la constante C recibe el nombre de capacitancia. Derivando esta ecuación con respecto al tiempo se obtiene la relación

$$i(t) = C\frac{dV(t)}{dt}. \tag{1.8}$$

A pesar de que esta última relación es más popular, es la ecuación (1.7) que define correctamente un capacitor. Para enfatizar este hecho, considérese un capacitor cuya capacitancia $C(t)$ depende del tiempo. En la ecuación (1.8) bastaría con remplazar esta capacitancia dependiente del tiempo, sin embargo utilizando la ecuación correcta se obtiene un termino extra

$$i(t) = C(t)\frac{dV(t)}{dt} + V(t)\frac{dC(t)}{dt}. \tag{1.9}$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación (1.7)

Definición. *Un capacitor es cualquier elemento de circuito descrito por una relación entre la carga y el voltaje (L. Chua et al., 1987, p. 298)*

$$\hat{C}(q, V) = 0. \tag{1.10}$$

Análogamente al resistor, el capacitor puede ser controlado por voltaje o por carga.

1.2.3. El inductor

Los fenómenos de inducción obedecen una misma ley: la ley de Faraday

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, da. \tag{1.11}$$

La integral de la parte derecha de la ecuación (1.11) es el flujo magnético ϕ.

Aplicando esta ecuación al caso de una bobina, se obtiene la relación

$$\phi(t) = Li(t), \tag{1.12}$$

en donde L es la inductancia. De manera similar al derivar con respecto al tiempo se obtiene la conocida relación

$$V(t) = L\frac{di(t)}{dt}. \tag{1.13}$$

Por la misma razón que en el capacitor, para incluir los elementos no lineales se debe utilizar la ecuación (1.12). Por lo tanto

Definición. *Cualquier elemento de circuito descrito por una relación entre el flujo magnético y la corriente es un inductor (L. Chua et al., 1987, p. 298)*

$$\hat{L}(\phi, i) = 0. \tag{1.14}$$

Este elemento puede ser controlado por flujo o por corriente.

1.2.4. Elementos activos y pasivos

Un elemento de circuito es pasivo si para su funcionamiento el resto del circuito debe proporcionarle energía. Por el contrario, es activo si proporciona energía al resto del circuito.

Matemáticamente hablando, un elemento es pasivo si su potencia es no negativa

$$P(t) = V(t)i(t) \geq 0, \tag{1.15}$$

o en términos de la energía

$$E(t) = \int V(t)i(t)dt \geq 0. \tag{1.16}$$

El signo en esta definición indica la dirección del flujo de energía (potencia); positivo si la energía "entra" en el elemento, negativa si "sale".

1.2.5. Leyes de Kirchhoff

Para describir el comportamiento de un circuito se deben conocer, por un lado, las relaciones características de los elementos de circuito que lo conforman y por otro las relaciones que surgen como resultado de la interconexión de estos elementos. Las leyes de Kirchhoff capturan estas relaciones.

Nodos, Ramas y Mallas

Con el fin de introducir las leyes de Kirchhoff, es necesario establecer las definiciones de nodo, ramas y mallas:

- Un nodo es cualquier punto en donde se unen las terminales de un dispositivo eléctrico o cualquier terminal aislada que no se encuentre conectada al circuito
- Una rama es la conexión de varios elementos de circuito
- Si se tiene un número de ramas conectadas que empiezan en un nodo y terminan en el mismo nodo, se obtiene una malla

Ley de corriente de Kirchhoff (LCK)

Esta ley establece que la suma algebraica de las corrientes salientes y entrantes de cualquier nodo es igual a cero

$$\sum_{j}^{n} i_j = 0. \tag{1.17}$$

Dada la relación entre la corriente y la carga, esta ecuación puede ser escrita como

$$\sum_{j}^{n} q_j = 0, \tag{1.18}$$

que expresa la ley de conservación de la carga en el circuito.

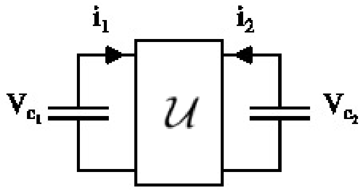
Ley de voltaje de Kirchhoff (LVK)

Esta ley establece que la suma algebraica del voltaje de todas las ramas que conforman una malla es igual a cero

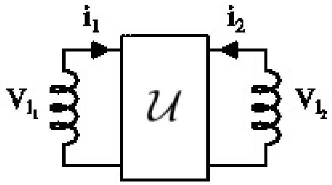
$$\sum_{k}^{b} V_k = 0. \tag{1.19}$$

Llamando ϕ a la integral del voltaje con respecto al tiempo, esta ecuación toma la forma

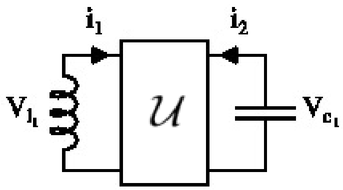
$$\sum_{k}^{b} \phi_k = 0. \tag{1.20}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 1.4: Posibles conexiones del sub-circuito $\mathcal{U}$ (a) dos capacitores (b) dos inductores (c) mixta. Este es el caso más sencillo, pero puede ser extendido cuando se tienen n capacitores y m inductores. Imagen reproducida de (L. Chua et al., 1987).

Con el fin de diferenciar el flujo magnético asociado a un inductor de la definición matemática dada anteriormente, esta última se llamará solamente flujo. La ecuación (1.20) puede ser interpretada como la ley de conservación del flujo; sin embargo, a diferencia del caso anterior esta no tiene la misma connotación física.

1.2.6. Circuitos dinámicos y formulación de estado

Se dice que un circuito es dinámico si contiene capacitores y/o inductores (L. Chua et al., 1987). Esto se debe a que de acuerdo con las ecuaciones (1.8) y (1.13) un circuito con estos elementos está descrito por ecuaciones diferenciales. Por el contrario, un circuito conformado por resistores únicamente, es un circuito algebraico.

Cualquier circuito compuesto de inductores, capacitores y resistores puede ser dibujado como un sub-circuito $\mathcal{U}$, que contiene todos los resistores y las fuentes, conectado externamente con cada inductor y capacitor (Jeltsema, 2005). Por lo tanto, es posible tener tres tipos de configuración para el sub-circuito $\mathcal{U}$: conectado solamente a capacitores, solamente a inductores o conectado a ambos.

En el primer caso, se escogen como variables de estado los voltajes en los capacitores. En el segundo caso, las variables de estado son las que circulan por los inductores. En el caso más general es necesario utilizar ambas variables de estado, por lo que recibe el nombre de configuración mixta. Estas posibles configuraciones se muestran esquemáticamente en la Figura 1.4.

De tal manera las leyes de Kirchhoff pueden ser escritas como

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_c = -\frac{1}{C}\hat{\boldsymbol{i}}_{\mathcal{U}}(i_l, V_c, t), \tag{1.21}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{i}_l = -\frac{1}{L}\hat{\boldsymbol{V}}_{\mathcal{U}}(i_l, V_c, t). \tag{1.22}$$

Ya que las ecuaciones (1.21) y (1.22) especifican el comportamiento de circuitos con varios inductores y capacitores, los términos $1/C$ y $1/L$ en este caso son matrices cuyas entradas están relacionadas con las capacitancias e inductancias de cada elemento.

Cabe señalar que existen circuitos eléctricos que no permiten esta formulación, por ejemplo un resistor controlado por corriente (voltaje), cuya función característica no sea invertible, conectado en paralelo (serie) a un capacitor (inductor) (Jeltsema, 2005).