

Reducción de Ruido en Señales de Espectroscopia en Resonancia Magnética con
Transformada Wavelets COINFLET Y BIORTHOGONAL

Estudiante

Fabio Andres Navarrete Forero
fanavarretef@libertadores.edu.co

Cod: 201922208600

Tutor

Héctor Fernando Cancino del Greiff

Fundación Universitaria los Libertadores
Trabajo de Proyecto de Grado
Bogotá – Colombia
2023

Resumen

En este documento se presenta la aplicación de la Transformada Wavelet Coiflet y la familia de wavelet Biorthogonal para la reducir de ruido en imágenes de resonancia magnética, utilizadas en procesos médicos no invasivos. Las señales medidas con ruido son procesadas por un algoritmo de limpieza de ruido en Matlab; luego las señales se convierten al dominio de la frecuencia donde son procesadas Comprimidas y limpiadas de fuente Ruidoso.

La transformada wavelet es una técnica usada para manipular, analizar y comprimir las señales de manera más eficiente en aplicaciones de reducción de ruido en imágenes de resonancia magnética (MRI, por sus siglas en ingles), que a menudo pueden verse afectadas por ruido gaussiano proveniente de diferentes fuentes, dicho ruido gaussiano es difícil de limpiar por la cantidad de información que se debe procesar en diagnósticos de ruptura de ligamentos hasta tumores.

La wavelet Coiflet usa técnicas de soporte compacto y propiedades de regularidad mejoradas que permiten capturar detalles finos en la imagen y preservar las características estructurales relevantes, al tiempo que reducen el ruido no deseado. En contraste la familia de wavelet Biorthogonales presentan la ventaja de tener filtros de análisis y síntesis separables, lo que simplifica el proceso de filtrado y mejora la eficiencia. La reducción de ruido con wavelet presentó resultados satisfactorios en altas frecuencias donde la wavelet Coiflet se destacó en comparación a la Daubechies y la Biorthogonal utilizando la técnica de Umbral Penallo.

Tabla de Contenido

CAPITULO 1.....	1
1.1 Palabras Clave.....	1
1.2. Objetivo General	1
1.3. Objetivos Especifico	1
1.4. Introducción	2
1.4.1 Problemática del ruido Gaussiano.....	2
1.4.2 Reduccion de Ruido Mediante Transformada Wavelet	3
1.4.3 Como Funciona la Transformada Wavelet.....	4
1.4.3.1 Transformada Wavelet Continua (CWT).....	5
1.4.3.2 Transformada Wavelet Discreta (DWT).....	6
1.4.4 Resonancia Magnética (RM).....	8
1.4.5 Bobinas de gradiente y decaimiento de inducción magnética (fid).	10
1.4.6 La Relajación Nuclear	11
1.4.6.1 FID (Free Induction Decay)	12
1.4.6.2 Métodos WSD Y CDA en Reducción de Ruido	14
CAPITULO 2	15
2. Marco Teórico	15

2.1 Teoría de Wavelets	15
2.2 Conceptos importantes:	17
2.2.1 Momentos de desvanecimiento:	17
2.2.2 Simetría en los Filtros:	17
2.2.3 Soporte Compacto:	17
2.3 Las wavelets coiflets	18
2.3.1 Características de la Wavelet Coiflet	18
2.4 Wavelet Ortogonales	19
2.5 Wavelet Biorthogonal	20
2.5.1 Características generales:	21
2.6 Relación a Ruido Residual	22
2.7 Medición de la Efectividad del Método (RSNR)	23
CAPITULO 3	24
3.1 Eliminación de ruido en imágenes de resonancia magnética	24
3.2 Reducción de Ruido Con trasformada Wavelet	25
3.3 Proceso Piramidal (DWT)	26
3.4 Análisis de Wavelets	30
3.4.1 Experimento 1	30
3.4.2 Experimento 2:	31

3.5 ANEXOS.....31

3.6 CONCLUSIONES34

Referencias35



CAPITULO 1.

1.1 Palabras Clave

Resonancia magnética, reducción del ruido, transformada Wavelet Coinflet, transformada Wavelet Biorthogonal, decaimiento de inducción (FID), relación a ruido residual.

1.2. Objetivo General

Reducir la relación a ruido en imágenes diagnosticas en procesos no invasivos usando la Wavelet Coinflet y la familia de Wavelet Biorthogonal.

1.3. Objetivos Especifico

Estudiar el comportamiento de la Wavelet Coinflet y la familia de Wavelet Biorthogonales en la reducción de ruido residual en imágenes de resonancia magnética en procedimientos médicos no invasivos con técnica de Umbral Penallo.



1.4. Introducción

1.4.1 Problemática del ruido Gaussiano

En la cuantificación de señales de resonancia magnética nuclear en seres vivos generalmente se presentan señales con pobre relación a ruido (SNR) que afectan la predicción de los parámetros físicos relevantes de los elementos constituidos por las moléculas: las frecuencias, fases de resonancia y las constantes de decaimiento y las amplitudes. [1].

Donde los datos son comúnmente se les realiza procesamiento computacional y por tanto, el problema principal de la estimación de los parámetros de las diferentes exponenciales complejas amortiguadas que constituyen la señal decaimiento de inducción libre FID (Free Induction Decay), las cuales se obtienen por detección coherente. Sin embargo, estas señales vienen contaminadas con ruido blanco Gaussiano, lo que dificulta la estimación de parámetros. [2]

Un proceso muy efectivo es la premedicación de las señales coherentes cuando se dispone de tiempo para la repetición del experimento n veces en las mismas condiciones de operación, con el cual se logra una mejora en la relación SNR directamente proporcional a \sqrt{n} ; donde n es el número de acumulaciones, no obstante este método es lento y en situaciones tales como espectroscopia de resonancia Magnética nuclear (ENM), donde el número de formas de ondas es limitado se requiere otro tipo de métodos para agilizar el proceso como la transformada wavelet que ofrece una reducción sustancial de tiempo.

La resonancia magnética es una técnica de diagnóstico médico que utiliza campos magnéticos y ondas de radio para obtener imágenes detalladas del interior del cuerpo humano. Sin embargo, durante la adquisición de las imágenes, es común que se produzca ruido, lo cual puede degradar la calidad de las imágenes y dificultar su interpretación precisa. Por esto se contemplan técnicas



de reconstrucción de imágenes a partir de datos ruidosos, utilizando algoritmos de descomposición esparcida y regularización. Además, se discuten enfoques específicos para reducir el ruido en secuencias de resonancia magnética, como imágenes ponderadas en difusión y secuencias de eco de gradiente.

En este proceso se pueden producir tres tipos de redundancia: psicovisual, espacial y de codificación. A partir de esto surge la necesidad de aplicar métodos de compresión, sin pérdida, que reduzcan la tasa de bit para transmisión o almacenamiento y conserven la información relevante sin afectar la calidad de la imagen comprimida. [3].

La Transformada Wavelet (WT) es una herramienta matemática que se ha desarrollado para una variedad de técnicas que han sido implementadas de forma independiente para diferentes aplicaciones dentro del procesamiento digital de señales, entre de las cuales están la reducción de ruido de señales y la compresión de datos. La transformada Wavelet package (WPT) también permite una descomposición simétrica entre pasos altos y pasos bajos, la cual es una herramienta que brinda una compresión y reducción de ruido general. Para la aplicación de la técnica de predicción lineal que permitan establecer los parámetros constitutivos de las señales FID es indispensable que la señal a ruido final supere un umbral mínimo que finalmente determine la efectividad de los procesos iniciales.[4]

1.4.2 Reducción de Ruido Mediante Transformada Wavelet

El ruido en señales y sistemas es por definición una problemática indeseada de naturaleza incoherente y surge la necesidad de suprimirlo de dichas señales donde existen dos dominios en los cuales el ruido puede perturbar a la señal uno: el dominio de la señal analógica y dos: el dominio de los coeficientes de la WT según la Wavelet madre empleada. Respectivamente dos

dominios pueden ser precisados como un espacio de Hilbert [5], donde el dominio imagen de la señal es expresado en la ecuación (1)

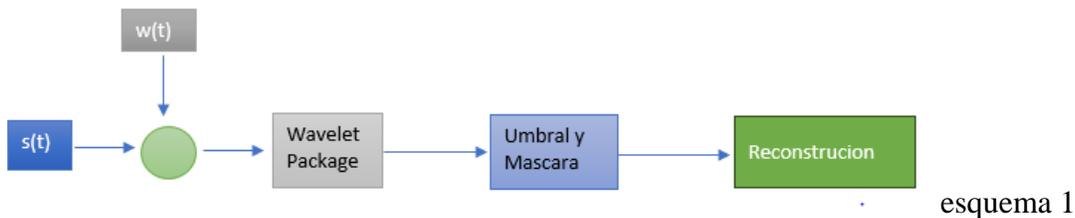
$$S(t) = s(t) + w(t) \quad (1).$$

Siendo $S(t)$ la señal con ruido $s(t)$ la señal sin ruido, $w(t)$ es el nivel de ruido.

$s(t)$ es un proceso aleatorio ergódico en el cual cada instante de tiempo es una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza unitaria.

Implícitamente el intento de supresión de ruido significa separar el ruido w de la señal S a través de un procesamiento de mezcla lineal. [2].

Sea s la señal coherente tiempo – frecuencia, w el ruido aditivo que representa una perturbación incoherente. La señal mezclada con ruido es transformada al dominio wavelet package, el cual se explica en el esquema 1.



1.4.3 Como Funciona la Transformada Wavelet

La Transformada Wavelet (WT) es una herramienta ampliamente utilizada en el procesamiento de señales, ya que entrega una interpretación del espectro local de una señal en un tiempo t . Entre las grandes ventajas de estas transformadas wavelets se cuentan la facilidad de implementación y la eficiencia computacional de sus algoritmos.

El objetivo principal de la WT es descomponer la



señal original en señales componentes denominadas Wavelets, que hacen parte de una base del espacio de las funciones, cumpliendo propiedades como ortogonalidad, tamaño y duración entre otras [3].

La WT se puede ver como una ampliación de la Transformada Fourier (FT) que descompone la señal en funciones sinusoidales, sólo que la descomposición de la señal se hace a partir de funciones más complejas, en las cuales no sólo se varía la frecuencia, sino también su posición y escala.

Las Transformadas Wavelets se dividen en dos tipos:

- Transformada Wavelet Continua (CWT).
- Transformada Wavelet Discreta (DWT).

Sus diferencias se presentan en la discretización de los parámetros de escala y traslación.

1.4.3.1 Transformada Wavelet Continua (CWT)

Se caracteriza porque sus parámetros cambian en forma continua y se define por medio de la expresión (1)

$$K_{\Psi} = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\omega)|^2 / \omega \, d\omega < \infty \quad (1)$$

Donde $\Psi(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\psi(t)$. La CWT busca el mayor grado de coincidencia posible entre la wavelet utilizada y la señal que se va a analizar.



1.4.3.2 Transformada Wavelet Discreta (DWT)

Siendo la señal por analizar $f[n]$ una función discreta, se define la transformada mediante las expresiones (2) y (3). [1]

$$C[j,K]=\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[f[n] \Psi_{-(j,k)}[n] \right] \quad (2)$$

Donde:

$$\Psi_{-(j,k)}[n]=2^{-(j/2)} \Psi[2^{-j} n-k] \quad (3)$$

Para implementar la DWT, se utiliza el algoritmo piramidal, el cual consta de filtros que descomponen la señal original en varios niveles, a fin de obtener una representación usando coeficientes de aproximación y detalle de la señal analizada; se aplican filtros pasa-alto y pasa-bajo que cambian la resolución de la señal; la escala se cambia mediante submuestreos u operaciones de interpolación.

Inicialmente, se pasa la señal por un filtro pasa bajo que elimina las componentes de alta frecuencia sin modificar la escala; a su vez, el submuestreo no afecta la resolución, puesto que el filtrado hace que la mitad de las muestras sean redundantes, lo cual permite que éstas puedan ser eliminadas sin perder información. En conclusión, la escala se cambia por el submuestreo y la resolución por el filtrado. Su representación matemática se puede describir por la convolución en el tiempo, definida en la ecuación (4)

$$x[n] * y[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[n - k] * y[k] \quad (4)$$



Para obtener el primer nivel de descomposición de la señal discretizada $f[n]$ y aplicarle la metodología de filtrado y submuestreo, se utilizan las expresiones (5) y (6).

$$(GF)_k = y_{high}$$

$$\sum_n [2k - n]F[n] = \sum_n g[n]F[2k - n] \quad (5)$$

$$(HF)_k = y_{low}$$

$$\sum_n h[2k - n]F[n] = \sum_n h[n]F[2k - n] \quad (6)$$

Donde G y H son los operadores de filtrado con $g[n]$ y $h[n]$ representando los filtros pasa alto y pasa bajo respectivamente y $2k$ el submuestreo.

La importancia de la DWT, en comparación con la DFT, se presenta en los instantes del tiempo de las componentes en frecuencia de la señal discreta [4]; es así como la resolución en la ubicación del tiempo dependerá del nivel de descomposición en el que aparezca, para frecuencias altas la ubicación en el tiempo será más precisa, en cambio, para frecuencias bajas no lo será, debido a un menor número de muestras para caracterizar la señal. Es así como la DWT implementada con filtros tendrá una buena resolución en el tiempo para frecuencias altas y una buena resolución en la frecuencia para frecuencias bajas. [5]

1.4.4 Resonancia Magnética (RM)

La Resonancia Magnética (RM) es un fenómeno físico por el cual ciertas partículas como los electrones, protones y los núcleos atómicos con un número impar de protones (Z) y/o un número impar de neutrones (N) pueden absorber selectivamente energía de radiofrecuencia al ser colocados bajo un potente campo magnético. Las imágenes RM utilizadas en diagnóstico clínico aprovechan la resonancia magnética del núcleo de H-1. Hay otros núcleos con posibilidades en Neuroimagen como el Na-23, pero aún están en fase muy experimental. Por tanto, nos vamos a referir únicamente a los núcleos de Hidrógeno. Una vez los núcleos han absorbido la energía de radiofrecuencia (RESONANCIA), devuelven el exceso energético mediante una liberación de ondas de radiofrecuencia (RELAJACIÓN). Esta liberación energética induce una señal eléctrica en una antena receptora con la que se puede obtener una imagen (IRM), hacer un análisis espectrométrico (ERM) o una combinación entre estas dos (imágenes espectrométricas). Desde el punto de vista global, todo el proceso se esquematiza en la Fig 1

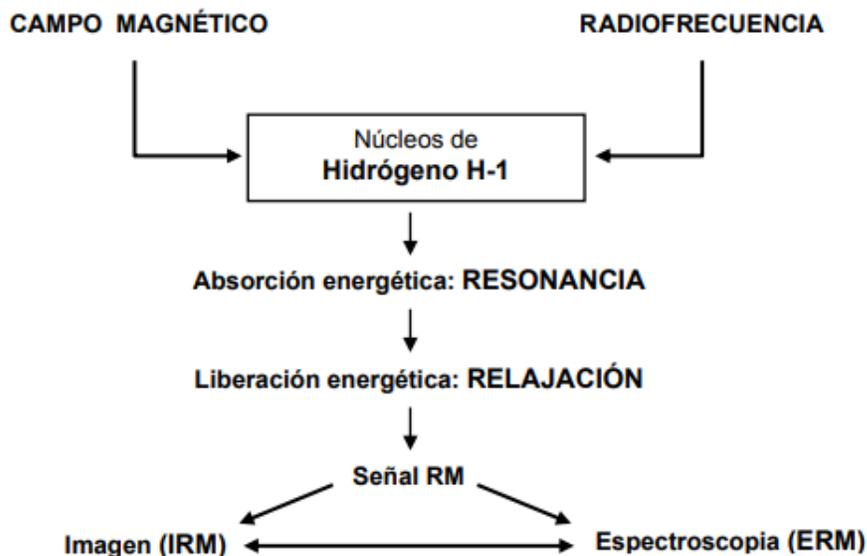


Figura 1

La IRM y la ERM son dos formas distintas de presentar una información que emana del fenómeno de la Resonancia Magnética Nuclear.

La señal de relajación proviene de los núcleos de H del tejido pero es modulada por multitud de parámetros unos externos (como es por ejemplo el valor del campo magnético de nuestro aparato de RM) y otros propios del tejido (como es por ejemplo el tipo de molécula en la que se encuentra el núcleo de H). Ello implica que la señal que detectamos contenga una gran cantidad de información. La habilidad de la técnica RM consiste en extraer de toda esta riqueza de información imágenes potenciadas en los parámetros que puedan interesarnos. Los avances más importantes en estos últimos años llevan a la RM a sobrepasar el campo puramente de la imagen morfológica para añadirle información fisiológica (como la difusión) o bioquímica (imágenes de desplazamiento químico). Por otro lado, la rapidez en la adquisición de las imágenes permite sobrepasar las imágenes estáticas para expandirse sobre estudios dinámicos o funcionales que años atrás eran impensables de abarcar.

Desde sus fases iniciales el campo de la neuroimagen fue el de mayor impacto de la técnica. La obtención directa de un corte sagital medio de la cabeza fue su mejor tarjeta de presentación. (Fig 1.1) En la actualidad las aplicaciones a la neuroimagen continúan consolidándose [6]



Figura 1.1, Primera imagen de RM en España, 14 de diciembre de 1983

1.4.5 Bobinas de gradiente y decaimiento de inducción magnética (fid).

En la figura 1, se muestra un esquema general de la máquina de resonancia magnética (MRI, por sus siglas en inglés), donde se observan los dos imanes principales y las bobinas de gradiente las cuales están ubicadas dentro del imán principal del escáner de resonancia magnética RM que generan campos magnéticos variables y controlados en diferentes direcciones dentro del escáner de resonancia magnética. Las bobinas de gradiente constan de tres pares de bobinas, cada par ubicado en una dirección diferente: x, y, z. Estas bobinas generan campos magnéticos lineales en las tres dimensiones, lo que permite la codificación espacial de la señal de resonancia magnética. Al cambiar la intensidad de los gradientes de campo magnético, es posible codificar diferentes posiciones espaciales en la imagen.

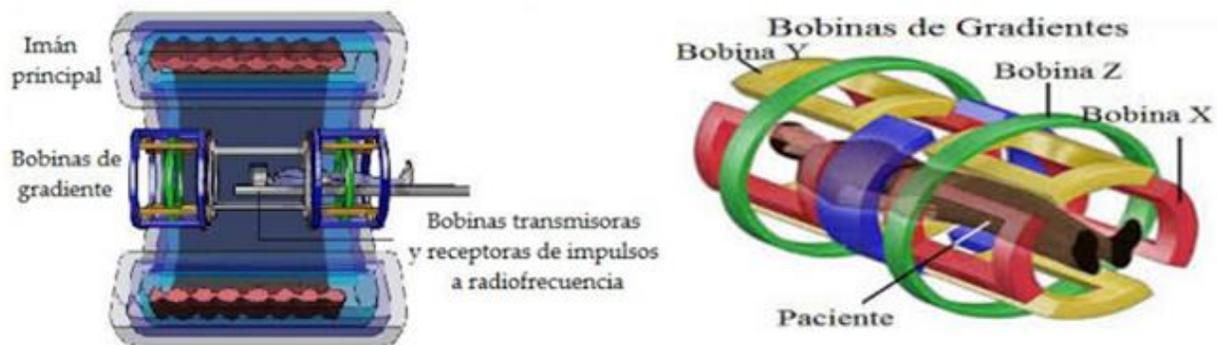


figura 1

La Imagen de Resonancia Magnética (IRM) se basa en la excitación de los núcleos de uno de los tres isótopos del hidrógeno, el ^1H , previamente introducidos en un potente campo magnético estático, denominado B_0 . La intensidad del campo magnético que se utiliza para la obtención de imágenes médicas en RM oscila entre 0,012 y 2 Teslas. Los imanes para producir ese campo magnético pueden ser permanentes, resistivos, superconductivos o mixtos.



1.4.6 La Relajación Nuclear

Una vez finalizada la emisión de RF, la magnetización va a volver a su posición inicial mediante un proceso de liberación energética denominado RELAJACIÓN. La relajación se produce ya que los núcleos desprenden el exceso energético que han absorbido al entrar en resonancia. La relajación termina cuando la proporción de núcleos del voxel entre los estados energéticos “up”/”down” coincide con el equilibrio Boltzmiano. (Fig 2)

La relajación energética no es un proceso espontáneo sino que requiere de estructuras del entorno que sean capaces de absorber las energías que van a liberar los núcleos. Esta energía liberada por los núcleos es del mismo orden de magnitud del que utilizan las moléculas para sus movimientos Brownianos, por lo que durante la relajación nuclear se produce un transvase de energía desde los núcleos a las estructuras moleculares circundantes. De aquí se desprende que la liberación energética se verá muy influenciada por el medio histoquímico en que se encuentran los núcleos. Las estructuras bioquímicas del entorno nuclear susceptibles de intercambiar energía con los núcleos, reciben globalmente el nombre de RED, PLASMA, LATEX o MEDIO. Esta dependencia del medio implica que la forma en que la magnetización vuelve a su posición inicial después del pulso de RF sea muy variable. El retorno a la posición de equilibrio de la magnetización produce unas modificaciones de campo magnético que pueden ser recogidas mediante una antena receptora ya que las variaciones de campo magnético inducen una señal eléctrica con la que se obtendrán las imágenes en RM. (Fig 2)

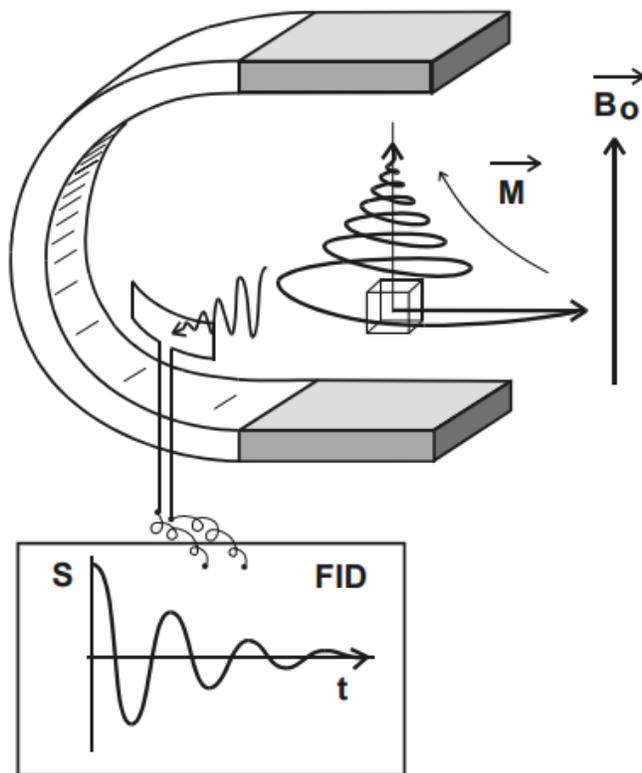


Fig. 2.
Obtención de la señal eléctrica en una antena receptora durante la relajación. Después de un pulso de 90° se induce una señal sinusoidal amortiguada (FID).

Después de enviar un pulso de radiofrecuencia, la relajación de la Magnetización induce una señal eléctrica en la antena receptora conocida por FID (Free Induction Decay).[6]

1.4.6.1 FID (Free Induction Decay)

Decaimiento de induccion magnetica, La FID es una señal sinusoidal amortiguada. La frecuencia de la sinusoidal es la frecuencia de precesión impuesta por el valor del campo magnético durante la relajación. El FID es una señal transitoria que disminuye rápidamente con el tiempo debido a varios factores, como la relajación de los núcleos y las interacciones entre los núcleos. La forma y la duración del FID proporcionan información sobre las propiedades físicas y químicas de la muestra. Esta señal es la que se procesa por medio de las técnicas tradicionales de promediación de las señales coherentes que es una técnica efectiva pero que conlleva tiempos de toma muy extensos para la obtención de la imagen sin ruido, en este documento se utilizan las técnicas de

transformada wavelet que ofrecen una notable reducción de tiempo en la toma de la imagen adicional que nos permite comprimir los datos. En la fig 2.1 y fig 2.3 se muestra la FID que se procesara para la reconstrucción de la imagen.

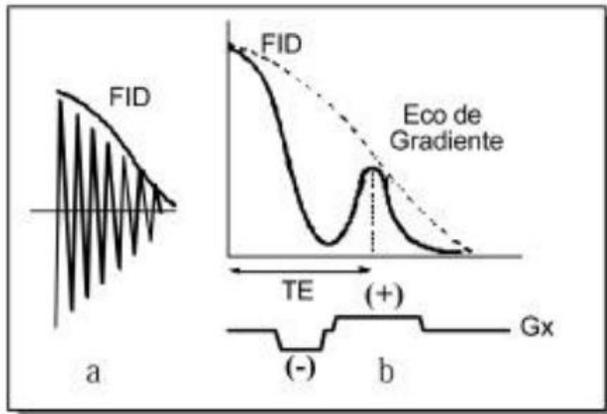


fig 2.1

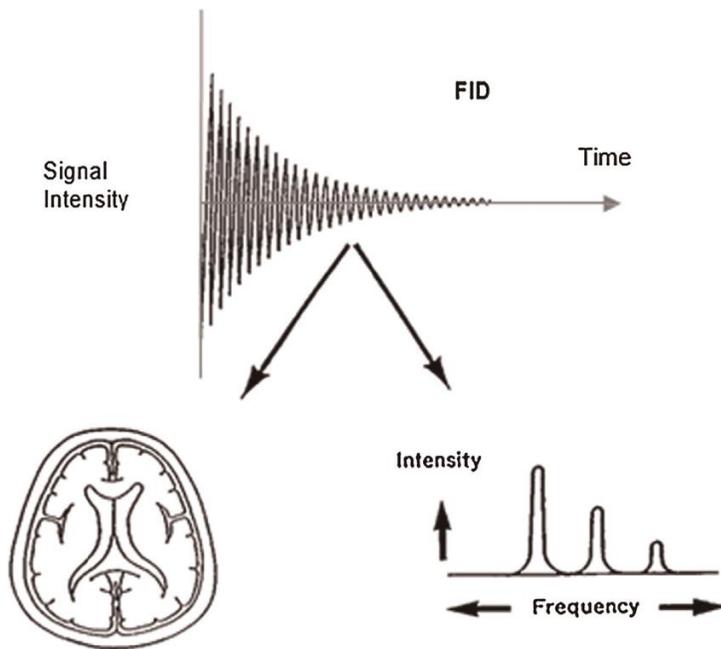


fig 2.2, Magnitud del espectro

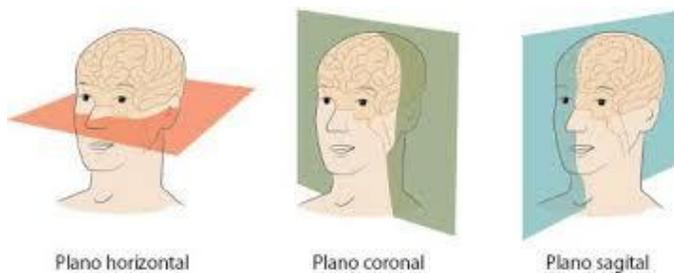


fig 2.3 planos de las bobinas de gradiente



1.4.6.2 Métodos WSD Y CDA en Reducción de Ruido

Donde WSD (Wavelet Shrinkage) y CDA (Cadzow De-noising Algorithm) son Tradicionalmente, las técnicas de reducción de ruido aplicadas a señales FID (free induction Decay) consisten en la aplicación de filtros que bloquean componentes espectrales, especialmente de alta frecuencia, o mediante la técnica de acumulación de señales FID considerando la repetición de los experimentos sin ninguna alteración de los parámetros externos tales como campo externo, frecuencia de RF en el tiempo, es decir, partiendo del principio que el sistema es invariante en el tiempo. Considerando ésta última técnica, se realizó un programa para establecer las mejoras en cuanto a la relación señal a ruido SNR en función de las acumulaciones a fin de tener un parámetro de referencia que en el presente trabajo se llamará la relación señal a ruido residual RSNR, la cual se definió de la siguiente manera:

$$RSNR = 20 * \log \left[\frac{norm(fid)}{norm(fid - fidruidoso)} \right] \quad (6.1)$$

Donde la notación *norm* se refiere al cálculo de la magnitud de la matriz FID.

Esta función se configuró mediante el programa de Matlab como la función “*residual*” y tiene como argumentos los dos vectores a comparar: el vector original *fid* (sin ruido) y el vector con ruido *fidruidoso*. [2]

CAPITULO 2

2. Marco Teórico

2.1 Teoría de Wavelets

Las wavelets son ondículas, utilizadas para la simulación de los algoritmos de comprensión de imágenes, datos y reducción de ruido blanco gaussiano, pasando por espacios vectoriales, bases ortogonales, bases ortonormales, complementos vectoriales.

La transformada wavelet maneja distintas resoluciones para distintas frecuencias y tiempos. En bajas frecuencia de una señal se encuentra la mayor parte de la información y en altas frecuencias se encuentra los detalles específicos; por ello el análisis se debe realizar a distintas resoluciones para distintas frecuencias.

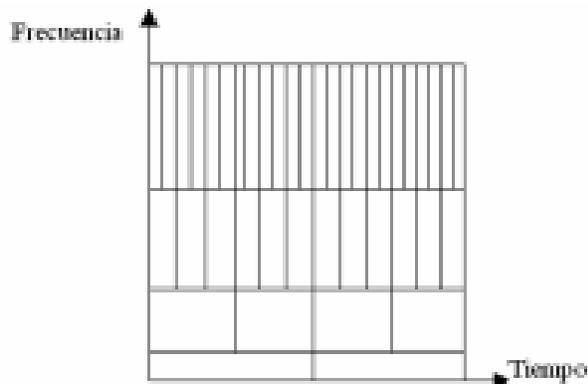
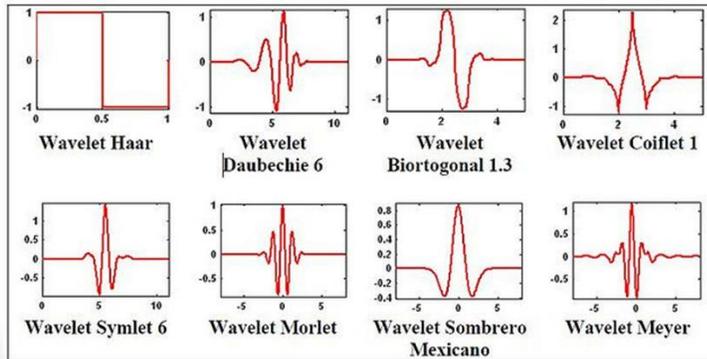


Figura 3, Resolución para transformada Wavelet WT

En la fig 4, se mencionan las principales transformadas Wavelet.

Estado del arte: Transformada Wavelet

- Familias wavelet



Wavelets madre más utilizadas.

fig 4

Una wavelet es una función integrable y oscilatoria cuya media es 0:

$$\int \Psi(t)dt = 0 \quad (7)$$

Las wavelets son funciones matemáticas que separan la información en diferentes componentes frecuenciales, y de ahí estudia cada componente con una cierta resolución asociada a la escala. Las familias de las wavelets están definidas por la ecuación (8):

$$\Psi(t)_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{(a)}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right); a, b \in R, a > 0 \quad (8)$$

Donde a es el parámetro de escalamiento o dilatamiento y b el desplazamiento o traslación. Entonces, esta familia de funciones son una copia de una función prototipo $\psi(t)$, denominada wavelet madre, trasladada y escalada mediante las variables b y a. [4]



2.2 Conceptos importantes:

2.2.1 Momentos de desvanecimiento:

nos permite conocer la forma de la wavelet y es un parámetro para saber que tan hábil es la wavelet para suprimir un polinomio dado y estos momentos de desvanecimiento están definidos por la ecuación (9)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) t^i dt = 0 \quad (9)$$

De lo anterior se determina que una función tiene v momentos de desvanecimiento si la integral es igual a 0 para $i=0, 1, \dots, v-1$. Generalmente el número de momentos de desvanecimiento de una wavelet determina el orden de la transformada.

2.2.2 Simetría en los Filtros:

se busca con el fin de evitar distorsiones en la información mediante la fase lineal, esto se expresa en la ecuación 10 donde k es una constante y w es la fase.

$$\varphi(w) = Kw \quad (10)$$

2.2.3 Soporte Compacto:

se refiere a que las funciones base que son diferentes a cero en un intervalo finito (de este concepto sale el nombre de "onditas", wavelets u ondellettes) definida en la ecuación (11)

$$\Psi(t) = 0 \text{ si } |t| > N \text{ para alguna } N \quad (11)$$

2.3 Las wavelets coiflets

son wavelet discretas diseñadas por Ingrid Daubechies, a pedido de Ronald Coifman , Esta familia de wavelets posee un mayor número de momentos de desvanecimiento: $2N$. La función wavelet y la de escalamiento son mucho más simétricas que las wavelets Daubechies. Poseen igualmente soporte compacto y el número de filtros es $6N$. Su apariencia es casi simétrica



figura 2: Wavelet Coiflet

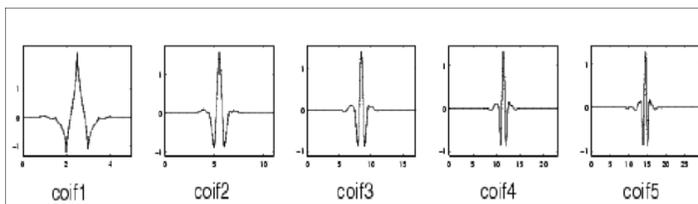


figura 3: Wavelet Coiflet de orden 1 al 5

- Wavelet function

$$\hat{\psi}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} e^{j\omega t/2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} |\omega| - 1\right)\right) \text{ if } \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}$$

$$\hat{\psi}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} e^{j\omega t/2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{4\pi} |\omega| - 1\right)\right) \text{ if } \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3}$$

$$\text{and } \hat{\psi}(\omega) = 0 \text{ if } |\omega| \notin \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$$

2.3.1 Características de la Wavelet Coiflet

Soporte compacto. Wavelets con el mayor número de momentos de desvanecimiento tanto para reconstrucción como para descomposición para un ancho de ventana dado.



FAMILIA	COIFLETS
Nombre Abreviado	coif
Orden	N= 1,2,3,4,5
Ejemplos	coif2, coif4
Ortogonal	✓
Biortogonal	✓
Soporte Compacto	✓
DWT	✓
CWT	✓
Ancho de vetana	6N-1
Longitud del Filtro	6N
Simetría	Casi simétrica
Numero de momentos de desvanecimiento	2N - 1

Tabla 1, Propiedades de la Wavelet Coiflet

2.4 Wavelet Ortogonales

Son wavelet con perfil casi simétrico. Las multi ondas son ondículas que dan un sistema ortonormal completo en el espacio L^2 . En aplicaciones 2D o multidimensionales de la DWT, ondículas ortonormales separables que consisten en tensores, Los productos de ondículas ortonormales 1D se utilizan con frecuencia, mientras que también están disponibles ondículas ortonormales no separables. Otra generalización de las ondículas es la base de Malvar, que también es una generalización de la base local de Fourier y proporciona una reconstrucción perfecta definida en la ecuación (12). [5]

$$\Psi(t)_{a,b} = 2^{-\frac{j}{2}} \Psi(2^{-j}t - b) \quad (12)$$

Condiciones para Wavelet ortonormales

$$\begin{aligned}
 (ON1) \quad & \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 = 1 \quad a.e. \xi \in \mathbb{R} \\
 (ON2) \quad & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j(\xi + k)) \overline{\hat{\psi}(\xi + k)} = 0 \quad a.e. \xi \in \mathbb{R} \forall j \geq 1 \\
 (C1) \quad & \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 = 1 \quad a.e. \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
 (C2) \quad & \sum_{j \geq 0} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + q))} = 0 \quad a.e. \xi \in \mathbb{R} \forall q \in 2\mathbb{Z} + 1
 \end{aligned}$$

Ortonormalidad

Lema 1.3 Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. El sistema $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal si sólo si vale (ON1).

Demostración: Si $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal entonces

$$\begin{aligned}
 \delta_{0k} &= \langle \psi_{0,0}, \psi_{0,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\psi_{0,k}(x)} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi) \overline{\hat{\psi}_{0,k}(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)} e^{2\pi i \xi k} d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\xi)|^2 e^{2\pi i \xi k} d\xi = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{\ell}^{\ell+1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 e^{2\pi i \xi k} d\xi \\
 &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |\hat{\psi}(t + \ell)|^2 e^{2\pi i t k} dt \\
 &= \int_0^1 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(t + \ell)|^2 e^{2\pi i t k} dt
 \end{aligned}$$

2.5 Wavelet Biorthogonal

Esta familia de wavelets exhibe la propiedad de fase lineal, que es necesaria para la reconstrucción de señales e imágenes. Mediante el uso de dos wavelets, una para la descomposición (en el lado izquierdo) y la otra para la reconstrucción (en el lado derecho) en lugar de esta única.

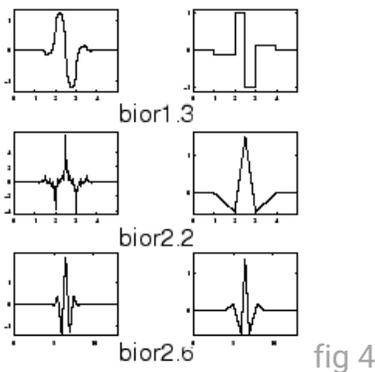


figura 4, Wavelet bior

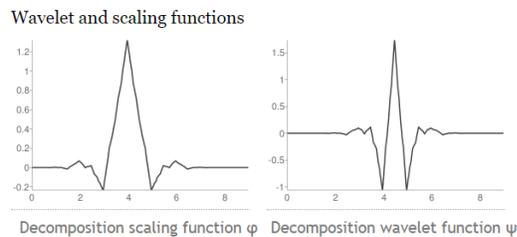


figura 5, Wavelet bior 4.4

Si bien la wavelet de Haar es la única wavelet ortogonal con fase lineal, puede diseñar wavelets biortogonales con fase lineal. Las wavelets biortogonales cuentan con un par de funciones de escala y filtros de escala asociados: uno para análisis y otro para síntesis.

También hay un par de wavelets y filtros de wavelet asociados, uno para análisis y otro para síntesis. Las ondículas de análisis y síntesis pueden tener diferentes números de momentos de fuga y propiedades de regularidad. Puede utilizar la ondícula con el mayor número de momentos de fuga para el análisis, lo que da como resultado una representación escasa, mientras que utiliza la ondícula más suave para la reconstrucción.

2.5.1 Características generales:

Soporte compacto ondículas spline biortogonales para las cuales la simetría y la reconstrucción exacta son posibles

con filtros FIR (en caso ortogonal es imposible excepto para Haar). [8]

Family	Biorthogonal
Short name	bior
Order Nr,Nd	Nr = 1 , Nd = 1, 3, 5
r for reconstruction	Nr = 2 , Nd = 2, 4, 6, 8
d for decomposition	Nr = 3 , Nd = 1, 3, 5, 7, 9
	Nr = 4 , Nd = 4
	Nr = 5 , Nd = 5
	Nr = 6 , Nd = 8
Examples	bior3.1, bior5.5

figura 6, características Wavelet bior

El siguiente código en matlab devuelve los filtros de descomposición y reconstrucción biortogonal B-spline con 3 y 5 momentos de fuga y traza las respuestas de impulso. Las respuestas de impulso de los filtros de paso bajo son simétricas con respecto al punto medio. Las respuestas de impulso de los filtros de paso alto son antisimétricas con respecto al punto medio.

```
[LoD,HiD,LoR,HiR] = wfilters( 'bior3.5' );  
subtrama(221);  
tallo (LoD);  
title( 'Filtro de análisis de paso bajo' );  
subtrama(222);  
tallo (HiD);  
title( 'Filtro de análisis de paso alto' );  
subtrama(223);  
tallo (LoR);  
title( 'Filtro de síntesis de paso bajo' );  
subtrama(224);  
tallo (HiR);  
title( 'Filtro de síntesis de paso alto' );
```

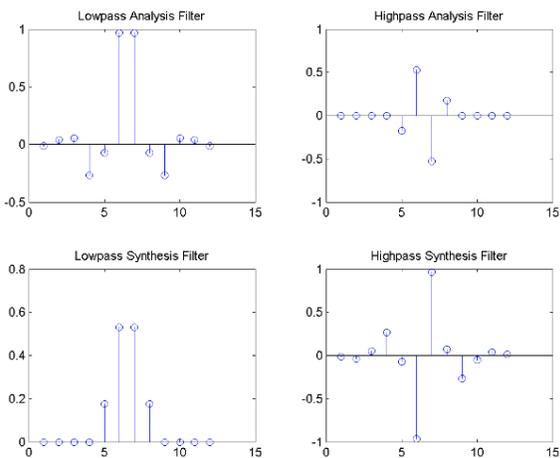


figura 7, filtrado pasa bajos y pasa altos

2.6 Relación a Ruido Residual

Las técnicas de reducción de ruido aplicadas a señales FID (Free induction decay) consisten en la aplicación de filtros que bloquean componentes espectrales, especialmente de alta frecuencia, o



mediante la técnica de acumulación de señales FID considerando la repetición de los experimentos sin ninguna alteración de los parámetros externos tales como campo externo, frecuencia de RF (Radio Frecuencia) en el tiempo, es decir, partiendo del principio que el sistema es invariante en el tiempo. Considerando ésta última técnica, se realizó un programa para establecer las mejoras en cuanto a la relación señal a ruido SNR en función de las acumulaciones a fin de tener un parámetro de referencia que en el presente trabajo se denomina la relación señal a ruido residual RSNR, la cual se define en la ecuación (13). [2]

$$RSNR = 20 * \log \left[\frac{nom(fid)}{nom(fid - fid \text{ ruidoso})} \right] \quad (13)$$

Donde la notación normal se refiere al cálculo de la magnitud de la matriz FID.

Esta función se configuró mediante el programa de Matlab como la función “residual” y tiene como argumentos los dos vectores a comparar: el vector original fid (sin ruido) y el vector con ruido fid ruidoso.

Para establecer la mejoría de la SNR mediante acumulación se realizan programa en Matlab. Ir a Anexo 1.

2.7 Medición de la Efectividad del Método (RSNR)

Relación señal a Ruido Residual (RSNR), definido en la ecuación (14).

$$RSNR = 10Log \left[\frac{\sum_{n=0}^{N-1} s^2 [n]}{\sum_{n=0}^{N-1} (s[n] - s_D[n])^2} \right] \quad (14)$$

donde $s[n]$ es la señal con ruido simulado y $s_D[n]$ es la señal sin ruido. Esta ecuación también se usó para evaluar la SNR actual de la señal contaminada con ruido.

En este estudio la comparación entre la SNR inicial y la residual fue empleada como indicador [7].



CAPITULO 3

3.1 Eliminación de ruido en imágenes de resonancia magnética

La adquisición de Imágenes de Resonancia Magnética (MRI) es una de las técnicas de adquisición de imágenes más importantes, la cual permite el estudio de características estructurales del interior del cuerpo humano de forma no invasiva. Este procedimiento está basado en el principio de Resonancia Magnética Nuclear (NMR), y la ventaja de esta técnica frente a otras no invasivas, como pueden ser los ultrasonidos, es la alta calidad de sus imágenes, frente al inconveniente de necesitar un equipo caro y de gran tamaño. Sin embargo, puesto que la señal de ultrasonido no se transmite a través de los huesos, en el caso de imágenes del cerebro, el cual está rodeado por el cráneo, la técnica de ultrasonidos no es viable y es necesario recurrir a la resonancia magnética para poder obtener dichas imágenes. Para un tiempo de adquisición dado, en imágenes de resonancia magnética existe un compromiso fundamental entre la resolución y la relación señal a ruido (SNR). Las imágenes de resonancia magnética se ven afectadas por ruido principalmente producido por interferencias debidas a la emisión de calor del cuerpo humano (Gaussiano en el espacio de frecuencias y Rician en la envolvente de su transformada de Fourier inversa), el cual impide la correcta identificación de formas y detalles. Más aún, existe una relación entre el nivel de ruido y la resolución de las imágenes adquiridas por resonancia magnética, es decir, cuanto mayor es la resolución de la imagen adquirida, menor es la relación señal a ruido. La forma más sencilla para reducir el nivel de ruido es incrementar el tiempo de adquisición (o equivalentemente, incrementar el número de imágenes promediadas, esto es, incrementar el número de experimentos (NEX)), lo cual puede causar un gran incremento en el gasto y largas listas de espera, además de largos tiempos de adquisición que llegan a ser problemáticos para los pacientes, los cuales pueden



no ser capaces de permanecer en un estado de reposo (debido al estrés, dolores, claustrofobia, etc.). Para eliminar dichos problemas, se puede aplicar un filtrado que actúe sobre la imagen adquirida. Dicho filtrado debe eliminar el ruido tratar de salvar los detalles de la imagen. El problema principal al eliminar ruido mediante regularización de la imagen es la resultante pérdida de información en bordes y contornos (desenfocado), lo cual es habitual en filtros Gaussianos (convolución). Perona y Malik propusieron un nuevo tipo de filtro, basado en ecuaciones en derivadas parciales y la ecuación de difusión del calor, el cual es el origen de una familia de filtros que permiten homogeneizar regiones mientras mantienen o intensifican los bordes entre las mismas.

3.2 Reducción de Ruido Con transformada Wavelet

La reducción de ruido en señales utilizando wavelets normalmente se realiza con la técnica denominada “wavelet shrinkage” o encogimiento wavelet. Esta técnica reduce la magnitud de cada coeficiente wavelet a un cierto valor dependiendo del nivel ruido que se estima de la señal. Un método muy común para el encogimiento es la designación de un umbral (λ). Al definir un umbral los valores de los coeficientes wavelet que se encuentren por debajo de él son eliminados (umbral duro o “hard-threshold) o bien reducidos en magnitud (umbral suave o “soft-threshold”).

El primer paso para la reducción de ruido consiste en calcular la DWT de la señal. Después debe de seleccionarse un umbral, ya sea duro o suave, con el fin de eliminar o reducir los coeficientes de menor energía. Finalmente se calcula la IDWT a partir de los nuevos coeficientes obtenidos.



Existen 2 categorías de métodos de reducción de ruido: Los umbrales globales y los umbrales recursivos. Los umbrales globales son aquellos que definen un valor fijo de umbral para ser aplicado a todos los coeficientes wavelet. Mientras que los umbrales recursivos seleccionan un umbral diferente para cada nivel de resolución. Existen diferentes maneras de seleccionar el umbral para la eliminación de muestras, de cualquier manera, el algoritmo VisuShrink es uno de los métodos más simples y se designa en la ecuación (15)

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log N} \quad (15)$$

En donde N es el número de muestras y σ es la desviación estándar que se puede estimar con la ecuación (8), donde DMA es la desviación media absoluta de los coeficientes wavelet.

$$\sigma = \frac{DMA\{d_{j,k}\}}{0.6745} \quad (16)$$

3.3 Proceso Piramidal (DWT)

Para implementar la DWT, se utiliza el algoritmo piramidal, el cual consta de filtros que descomponen la señal original en varios niveles, a fin de obtener una representación usando coeficientes de aproximación y detalle de la señal analizada; se aplican filtros pasa-alto y pasa-bajo que cambian la resolución de la señal; la escala se cambia mediante submuestreos u operaciones de interpolación. En la fig 8 se plantea los niveles de filtrado de la señal FID, donde $g(n)$ es los filtros pasa bajos y $h(n)$ los filtros pasan altos

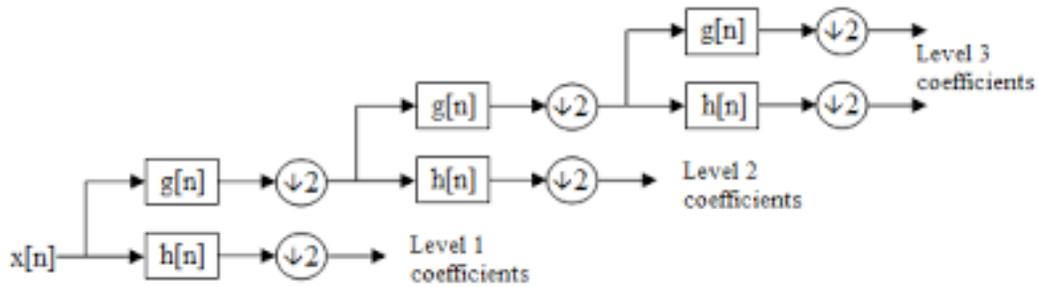


fig 8, filtrado de 3 niveles

Inicialmente, se pasa la señal por un filtro pasa bajo que elimina las componentes de alta frecuencia sin modificar la escala; a su vez, el submuestreo no afecta la resolución, puesto que el filtrado hace que la mitad de las muestras sean redundantes, lo cual permite que éstas puedan ser eliminadas sin perder información. En conclusión, la escala se cambia por el submuestreo y la resolución por el filtrado. Su representación matemática se puede describir por la convolución en el tiempo, definida en la ecuación.

$$x[n] * y[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[n - k] * y[k] \quad (4)$$

Para obtener el primer nivel de descomposición de la señal discretizada $f[n]$ y aplicarle la metodología de filtrado y submuestreo, se utilizan las expresiones (5) y (6). En la fig 9 se muestra el submuestreo de columnas y el submuestreo de filas para las señales filtradas

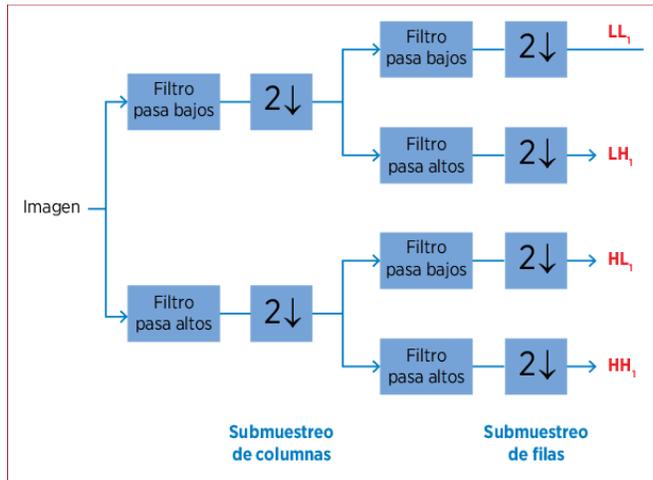


fig. 9

La comprensión de los datos sin pérdida en la señal Ruidosa en la fig 9 denominada imagen descompone la información mediante: filtros pasa bajo- pasa bajo (LL), paso bajo – paso alto (LH), paso alto- paso bajo (HL) y paso alto- paso alto (HH). El filtro LL genera un coeficiente aproximado y los tres restantes son coeficientes detallados. La sub- banda LL contiene información de las frecuencias bajas de la imagen original, de manera similar, las bandas, HL, LH y HH, contiene información de las frecuencias altas. Esto nos permite aplicar el proceso de reconstrucción después de diezmar los coeficientes para luego aplicar procesos de comprensión sin pérdida útiles para la reducción del ancho de banda, mejorando la capacidad de almacenamiento e incrementar la velocidad de transmisión sin afectar la calidad de la imagen aparte que esta transformación separa la señal en componentes de diferentes frecuencias y resoluciones temporales.

Después de la descomposición, se obtiene una serie de coeficientes wavelet que representan la contribución de cada componente de frecuencia en diferentes momentos. Algunos de estos coeficientes contendrán información relevante de la señal original, mientras que otros pueden contener ruido.



Luego en la etapa de Umbralización, se aplican umbrales a los coeficientes wavelet. Los coeficientes que son considerados como ruido (generalmente aquellos con valores pequeños) se establecen en cero o se reducen significativamente. Esto elimina o reduce la contribución del ruido en la señal.

Posteriormente a esto se realiza la reconstrucción de la señal utilizando los coeficientes modificados. Esto implica combinar los coeficientes de diferentes niveles de resolución para obtener una versión mejorada de la señal original, con el ruido reducido, para luego obtener el Resultado que es una señal con menos ruido, pero que conserva las características esenciales de la señal original.

La clave de esta técnica es que permite una reducción selectiva del ruido, preservando las partes importantes de la señal. Dado que las señales reales pueden tener componentes de alta y baja frecuencia que varían en el tiempo, la transformada wavelet es especialmente útil para abordar esta variabilidad y eliminar el ruido de manera efectiva.

La importancia de la DWT, en comparación con la DFT, se presenta en los instantes del tiempo de las componentes en frecuencia de la señal discreta [4]; es así como la resolución en la ubicación del tiempo dependerá del nivel de descomposición en el que aparezca, para frecuencias altas la ubicación en el tiempo será más precisa, en cambio, para frecuencias bajas no lo será, debido a un menor número de muestras para caracterizar la señal. Es así como la DWT implementada con filtros tendrá una buena resolución en el tiempo para frecuencias altas y una buena resolución en la frecuencia para frecuencias bajas [8].

3.4 Análisis de Wavelets

3.4.1 Experimento 1

Se hizo una valoración del comportamiento de 6 wavelets madre diferentes. Estas fueron manejadas con las familias Wavelet: Daubechies (Db), Symlets (Sym), Coiflets (Coif), Biorthogonal (Bior), Biothogonal Spline Inverso (Rbior) y la Meyer discreta (dMey) . Las wavelets se probaron bajo las condiciones establecidas previamente. La Tabla 2 resume los resultados para las cuatro wavelets que mostraron un mejor comportamiento. Como puede verse la Coif3 y la Bior2.6 se destacó del resto de las wavelets. En este caso, la diferencia era menos significativa cuando más componentes eran incluidas en el FID simulado.

Tabla 1 Asignación de la mejor wavelet, SNR=5 dB, J=5, Umbral penallo

Wavelet	Señal S1		Senal S9	
	RSNR (dB) valor medio	RSNR (dB) Desviacion Estandar	RSNR (dB) valor medio	RSNR (dB) Desviacion Estandar
Db6	6,4427	1,4780	6,6547	1,1246
Sym 7	7,6044	1,5359	8,0017	1,5910
Coif 3	8,0357	1,1231	9,9583	1,6600
Bior2.6	8,4013	1,4604	7,9007	1,3789
Rbio4.4	5,0940	1,3315	6,9007	1,4925
Dmey	4,0418	0,9979	7,1346	1,3061

Tabla 2

Como puede verse la Bior2.6 se destaco del resto de las wavelets para una sola componente. Con 9 compuestos la Coi3 presenta una mejora significativa. En este caso. La diferencia para un compuesto es menos significativa. Por tanto, para el caso de señales “en vivo” de resonancia Magnética RM de varios compuestos puede decirse que la Coif3 presenta una mejor RSNR.

3.4.2 Experimento 2:

Se probaron las cinco reglas sqtwologuwn sqtwologswn, penalhi, penalme y penallo, en combinación con las 2 wavelets (Coif3, Bior2.6) que resultaron del experimento 1. Las señales S1 y S9 se emplearon, con SNR=5 y 10 dB, y J=5. La Tabla 3 resume los resultados de la búsqueda para la regla del mejor umbral.

Regla Umbral	Wavelet	Señal S1		Señal S9	
		RSNR (dB) valor medio	RSNR (dB) Desviacion Estandar	RSNR (dB) valor medio	RSNR (dB) Desviacion Estandar
sqtwologuwn	Coif3	9,0528	1,3441	7,8817	1,6615
sqtwologswn	"	6,2941	1,3851	9,3111	1,5651
penalhi	"	8,9913	1,1464	6,5032	1,0532
penalme	"	7,8457	1,1553	6,2874	1,5577
penallo	"	8,0357	1,1291	9,9583	1,6600
sqtwologuwn	Bior2.6	9,8331	1,4223	8,7685	1,4655
sqtwologswn	"	7,5501	1,2682	7,3046	1,3963
penalhi	"	9,0730	1,3953	8,0332	1,6547
penalme	"	8,6727	1,1552	7,5382	1,2392
penallo	"	8,4013	1,4604	7,9145	1,3789

Tabla 3

Las reglas sqtwologuwn y penallo mostraron consistentemente los mejores resultados. Similarmente se obtuvieron resultados para las 2 wavelets estudiadas. En el caso de señales con muchos compuestos K=9

3.5 ANEXOS

A continuación, programa 1 en Matlab



```
function [sigden]=noisywavelet(sig,level)
wname='db10'; % para voltajes de impulso, sym4
% de 'frecuencia'
sorrh='h';
[coefs,longs]=wavedec(sig,level,wname);
siz=size(coefs,3);
thrParams = utthrset_cmd(coefs,longs);
first = cumsum(longs)+1;
first = first(end-2:-1:1);
tmp = longs(end-1:-1:2);
last = first+tmp-1;
for k = 1:level
thr_par = thrParams{k};
if ~isempty(thr_par)
cfs = coefs(first(k):last(k));
nbCFS = longs(end-k);
NB_int = size(thr_par,1);
x = [thr_par(:,1) ; thr_par(NB_int,2)];
alf = (nbCFS-1)/(x(end)-x(1));
bet = 1 - alf*x(1);
x = round(alf*x+bet);
x(x<1) = 1;
x(x>nbCFS) = nbCFS;
thr = thr_par(:,3);
for j = 1:NB_int
if j==1
d_beg = 0;
else
d_beg = 1;
end
j_beg = x(j)+d_beg;
j_end = x(j+1);
j_ind = (j_beg:j_end);
cfs(j_ind) = wthresh(cfs(j_ind),sorrh,thr(j));
end
coefs(first(k):last(k)) = cfs;
end
end
sigden= waverec(coefs,longs,wname);
end
```

A continuación, se relaciona el programa 2 en Matlab para determinar la relación a ruido residual de la señal filtrada y la señal original.

```
% en esta funcion van los dos vectores a comparar
% la salida es la relacion señal a ruido entre el vector original sin ruido
% y el vector diferencial
function rsnr=residual(rid, fidruidoso);
if length(fid)=length(fidruidoso);
    error(los vectores deben ser de la misma longitud);
```



```
end  
rsnr=20*log10(nom(fid)/nom(fid-fidruidoso));
```

A continuación, código 3 en Matlab el cual contamina una imagen con ruido Blanco Gaussiano y

luego se filtra la imagen por medio de la wavelet coiflet con estimación de Umbral.

```
imagen_mri = imread('pex.jpg');  
  
% Convierte la imagen a escala de grises si es en color  
if size(imagen_mri, 3) == 3  
    imagen_mri = rgb2gray(imagen_mri);  
end  
  
% Agrega ruido gaussiano a la imagen de resonancia magnética  
imagen_ruidosa = innoise(imagen_mri, 'gaussian', 0, 0.02);  
  
% Realiza la descomposición wavelet utilizando la wavelet Coiflet  
nivel_descomposicion = 2; % Nivel de descomposición de la wavelet  
[wavedec2_output, ~] = wavedec2(imagen_ruidosa, nivel_descomposicion, 'coif2');  
  
% Estima el umbral de reducción de ruido utilizando el criterio SURE  
thr = wthrmngr('dw2ddenoLVL', 'penalhi', wavedec2_output, nivel_descomposicion);  
  
% Aplica el umbral de reducción de ruido a los coeficientes de la wavelet  
wavedec2_denoised = wthresh(wavedec2_output, 's', thr);  
  
% Reconstruye la imagen de resonancia magnética denoiseada  
imagen_denoised = waverec2(wavedec2_denoised, wavedec2_output(1:(end-3)), 'coif2');  
  
% Muestra la imagen original, la imagen ruidosa y la imagen denoiseada  
figure;  
subplot(1, 3, 1), imshow(imagen_mri), title('Imagen Original');  
subplot(1, 3, 2), imshow(imagen_ruidosa), title('Imagen Ruidosa');  
subplot(1, 3, 3), imshow(imagen_denoised), title('Imagen Denoiseada');
```



3.6 CONCLUSIONES

Se presentó la validez del método de reducción de ruido mediante wavelets Coif y Bior con técnica de umbral penallo pues permite mejorar la respuesta en frecuencia de señales de voltaje y corriente, eliminando picos que no son propios de las señales, y que son resultado de limitaciones de los instrumentos de medición. El ruido es una señal de alta frecuencia y afecta a los resultados cuando se analizan en el dominio de la frecuencia en valores altos, y por ello siempre es importante aplicar una reducción de ruido a las señales medidas antes de procesarlas en una imagen diagnóstica de Resonancia magnética. El método de reducción de ruido por medio de Wavelet con Umbralización Dependiente del Intervalo resulta aplicable porque la transformada wavelet es idónea para señales aperiódicas y con ancho de banda extenso, como se presentan en la toma y procesamiento de señales en procedimientos médicos en Resonancia magnética. El método de reducción de ruido por medio de Wavelet resultó ser más eficiente que los métodos por filtrado convencionales.

La wavelet Coif3, fue la que mejor comportamiento mostro en términos de la relación a ruido comparada con la demás wavelet madre Daubechies (Db), Symlets (Sym), Coiflets (Coif), Biorthogonal (Bior), Biothogonal Spline Inverso (Rbior) y la Meyer discreta (dMey). La diferencia en el comportamiento de la demás wavelet fue menos significativo a medida que se utilizaba señales FID con mayor número de componentes.



Referencias

- [1] Zhang R, A. R. (2006). *Denoising of gamma-ray signals by interval - dependent thresholds of wavelet analysis*. Measurement Science and Tecnology.
- [2] Greif, H. F. (2017). *Reducción de ruido en señales de Resonancia Magnética* . Bogota : Editorial Académica Española.
- [3] Greiff, H. F. (año 2001). *Ingeniería Universidad Distrital Vol 6* . Retrieved from Tecnicas de Simulación y Filtrado de Ruido en Señales Espectroscopicas.
- [4] Donoho D. L., a. J. (1992). *Minimax estimation via wavelet Shrinkage*.
- [5] Gao, H. -Y. (1997). *Wavelet Shirinkage Denoising Using The Non - Negative Garrote*.
- [6] Gii, D. J. (n.d.). *Introduccion Biofisica a la resonancia Magnetica en Neuroimagen* . Barcelona .
- [7] Lang M., G. H. (1995). *Noise Reduction Using an Indecimated discrete*.
- [8] M., A. (1998). *Time- Frequency and Wavelets in Biomedical Signal Processing*. New York.